

Determinación de las relaciones angulares y de la deformación por cizalla, para cizallamientos en materiales con una heterogeneidad planar

por J. CARRERAS *

RESUMEN

Se aplica la función desplazamiento del modelo de cizalla simple a una superficie plana en el seno de una zona de cizalla, partiendo de cualquier relación angular inicial entre ambas. Con ello se establecen las relaciones generales que expresan la dependencia de los ángulos, del valor de la deformación por cizalla. Se describen métodos analíticos y gráficos que permiten determinar la deformación por cizalla, utilizando valores angulares de fácil deducción a partir de los elementos estructurales medibles directamente en la zona de cizalla.

SUMMARY

The simple shear displacement function is applied to a planar surface within a shear zone, and inclined at any angle to the shear zone. This allows the general relationship, between angles and shear strain, to be established. Graphical and numerical methods are described, and these enable the determination of shear strain from known angles which are easily obtained from the structural elements directly measurable in shear belts.

INTRODUCCIÓN

La investigación en el tema de la deformación en las zonas de cizalla ha experimentado un considerable auge en estos últimos años. El análisis de zonas de cizalla de dimensiones reducidas ha revestido una importancia especial por cuanto en ellas están implicados una serie de conceptos teóricos que permiten relacionar esquistosidad, deformación infinitesimal, deformación progresiva, deformación heterogénea, esfuerzos e incluso transformaciones microestructurales de la roca. En particular, las zonas de cizalla se prestan a la determinación de los valores de la deformación finita así como de los desplazamientos implicados en ellas, por conocerse con exactitud las relaciones que ligan la orientación del elipsoide de deformación con los valores relativos de los ejes principales del mismo (ver RAMSAY y GRAHAM, 1970). En los cizalla-

mientos esquistosos desarrollados en rocas previamente isotropas, ello es posible debido a que existe una relación única entre el ángulo que forma la esquistosidad neogenerada con el plano de cizalla y el valor de la deformación. No obstante, cuando se considera una zona de cizalla esquistosa que afecta a una roca que contiene una heterogeneidad planar previa (p. ej. una esquistosidad) la relación angular mencionada es más compleja ya que interviene un nuevo factor: la orientación de la superficie anterior con respecto al plano de cizalla. En este caso particular el concepto de la deformación es esencialmente el mismo que el establecido para las zonas de cizalla en general, puesto que se trata simplemente de aplicar las mismas ecuaciones de desplazamiento a la superficie plana preexistente. Sin embargo, puede ser de cierta utilidad examinar las relaciones que ligan entre sí los valores angulares de las superficies preexistentes o de referencia referidos a los elementos geométricos de la zona de cizalla, para distintos valores de la deformación por cizalla. Con ello puede facilitarse la determinación del valor de la deformación en los cizallamientos que presentan las características mencionadas.

Los cálculos y métodos gráficos que a continuación se exponen, han sido elaborados con la finalidad de evaluar el valor de la deformación en las zonas marginales a las bandas miloníticas del litoral septentrional de la Península del cabo de Creus (provincia de Gerona).

Las deducciones efectuadas se fundamentan en un modelo de cizalla tridimensional, en el cual sólo existe desplazamiento en una de las tres direcciones cartesianas. RAMSAY y GRAHAM (1970), basándose en conceptos de compatibilidad de deformación y en limitaciones de tipo geométrico, razonan que ésta es la única solución posible y por ello las zonas de cizalla producidas por deformación natural en las rocas de la corteza, se corresponden casi perfectamente con el modelo de cizalla simple.

El problema del mecanismo de deformación por

* Departamento de Petrología y Geoquímica, Universidad de Barcelona.

cizalla en los casos en que esté presente una marcada anisotropía mecánica, tal como puede ser el caso en discusión, puede resultar algo más complejo que el modelo de cizalla simple, e incluso es posible que en el proceso esté involucrada cierta componente de cizalla pura. Sin embargo, dado que la finalidad del trabajo es establecer una determinación aproximada del valor de la deformación, el modelo propuesto por RAMSAY y GRAHAM puede hacerse extensivo al caso de cizallas que afecten a una roca que contenga una heterogeneidad planar previa.

Finalmente hay que señalar que todos los cálculos que a continuación se exponen, están encaminados a determinar el valor de la deformación por cizalla (γ), siendo el valor de ésta correlacionable con las extensiones principales ($\epsilon_{1,2}$) o con las extensiones cuadráticas principales ($\lambda_{1,2}$). Sin embargo, estos valores principales, no coinciden con los de los mismos parámetros para la deformación según la superficie de referencia.

CÁLCULO DE LAS RELACIONES ANGULARES ENTRE SUPERFICIES DE REFERENCIA Y LOS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA ZONA DE CIZALLA, PARA DISTINTOS VALORES DE γ

A fin de establecer las relaciones que ligan las orientaciones de las superficies de referencia en sus estados inicial y deformado, se considera una zona comprendida entre dos planos paralelos, cuyo espesor es igual a la unidad, en el interior de la cual la cizalla es homogénea (Fig. 1). Si se considera que los planos de cizalla son paralelos al definido por los

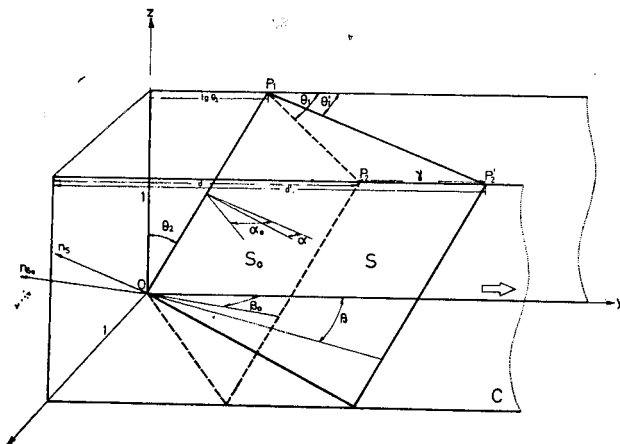


FIG. 1.—Elementos geométricos en la deformación del plano S_0 en el seno de la zona de cizalla homogénea delimitada por los planos $x=0$ y $x=1$. S: plano deformado; γ : deformación por cizalla; α_0 y α : ángulos formados por el plano de cizalla con los planos S_0 y S respectivamente; β_0 y β : ángulos formados por la dirección de movimiento (y) con los planos S_0 y S respectivamente.

(La orientación de la zona de cizalla con respecto a los ejes de coordenadas x, y, z es arbitraria, no existiendo correspondencia entre estos ejes y los X, Y, Z del elipsoide de deformación).

ejes x e y de un sistema de coordenadas y además que los puntos del plano $x=0$ (plano que pasa por el origen) están inmóviles, los desplazamientos vendrán dados por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

El estudio analítico se fundamenta en el examen de los desplazamientos de una superficie plana de referencia cualquiera, comprendida entre los planos $x=0$ y $x=1$, calculando la variación de la orientación de la misma con respecto a la zona de cizalla, para distintos valores de desplazamiento. Todas las orientaciones posibles de las superficies iniciales pueden obtenerse considerando todos los planos que pasan por el origen de coordenadas. Un plano S_0 dado, vendrá definido por tres puntos: $O : (0,0,0)$, $P_1 : (0, z \operatorname{tg} \theta_2, z)$ y $P_2 : (1, d, z)$. Para simplificar puede considerarse $z=1$, con lo cual los tres puntos que definen al plano S_0 resultan:

$$\begin{aligned} O &: (0,0,0) \\ P_1 &: (0, \operatorname{tg} \theta_2, 1) \\ P_2 &: (0, d, 1) \end{aligned}$$

d puede expresarse en función de θ_1 y θ_2 , siendo

$$d = \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{cotg} \theta_1 \quad (2)$$

Después de la deformación debida a un desplazamiento paralelo al eje y definido por (1), de los tres puntos que definen al plano S_0 , dos permanecen invariables por estar situados en el plano $x=0$ en el cual no hay deformación ni desplazamiento. Los puntos que definen al plano S (deformado de S_0) son:

$$\begin{aligned} O &: (0,0,0) \\ P &: (0, \operatorname{tg} \theta_2, 1) \\ P' &: (1, d', 1) \end{aligned}$$

siendo $d' = \operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{cotg} \theta_1 + \gamma$

La ecuación del plano S viene dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{tg} \theta_2 & 1 & 1 \\ 1 & (\operatorname{tg} \theta_2 + \operatorname{cotg} \theta_1 + \gamma) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

operando resulta:

$$(\operatorname{cotg} \theta_1 + \gamma) x - y + \operatorname{tg} \theta_2 \cdot z = 0 \quad (5)$$

En el caso particular de que $\gamma=0$, es decir para el plano no deformado, la ecuación (5) se simplifica a:

$$\operatorname{cotg} \theta_1 \cdot x - y + \operatorname{tg} \theta_2 \cdot z = 0 \quad (6)$$

Las ecuaciones (6) y (5) definen respectivamente al plano de referencia (S₀) y al resultante de su deformación (S), ecuación esta última dependiente del valor de la deformación por cizalla (γ).

Valor del ángulo que forman el plano de cizalla y la superficie de referencia

Se denomina α al ángulo formado por una superficie de referencia en general (S) con el plano de cizalla (C). El valor del mismo variará naturalmente para distintos valores de la deformación. El ángulo entre los planos mencionados

$$\begin{aligned} C : x &= n & (1 > n > 0) \\ S : (\cotg \theta_1 + \gamma) \cdot x - y + \tg \theta_2 \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

viene dado por:

$$\cos \alpha = \frac{\cotg \theta_1 + \gamma}{\sqrt{(\cotg \theta_1 + \gamma)^2 + \tg^2 \theta_2 + 1}} \quad (7)$$

Para el caso particular $\gamma = 0$, la fórmula anterior se simplifica a:

$$\cos \alpha_0 = \frac{\cotg \theta_1}{\sqrt{\cotg^2 \theta_1 + \tg^2 \theta_2 + 1}} \quad (8)$$

La expresión (7) establece la dependencia de α con respecto al valor de la deformación por cizalla γ , para cada par de valores iniciales de θ_1 y θ_2 . Es decir $\alpha = f_1(\gamma)$, resultando una función distinta para cada par de valores de θ_1 y θ_2 .

Valor del ángulo que forma la superficie de referencia con el eje y

Se denomina β al ángulo que forma la superficie de referencia (S) con el eje de coordenadas y , paralelo a la dirección de movimiento en la zona de cizalla. El ángulo β viene dado por:

$$\sen \beta = \frac{1}{\sqrt{(\cotg \theta_1 + \gamma)^2 + \tg^2 \theta_2 + 1}} \quad (9)$$

De nuevo para el caso particular $\gamma = 0$, la fórmula anterior se simplifica a:

$$\sen \beta_0 = \frac{1}{\sqrt{\cotg^2 \theta_1 + \tg^2 \theta_2 + 1}} \quad (10)$$

La expresión (9) establece la dependencia de β con respecto a la deformación por cizalla γ , para cada par de valores θ_1 y θ_2 . Ello puede expresarse en este caso por $\beta = f_2(\gamma)$, resultando una función diferente para cada par de valores de θ_1 y θ_2 .

Llegado este punto se conocen las ecuaciones que determinan la variación de los ángulos que forman el plano de referencia con el plano de cizalla y con la dirección de desplazamiento, en función de los valores de la deformación por cizalla γ . Sin embargo, en los problemas de deformación natural, los únicos ángulos directamente determinables son precisamente α y β , mientras que las fórmulas anteriores dan el valor de éstos en función de θ_1 , θ_2 y γ que son datos incógnitos. Para la determinación de γ debe obtenerse una expresión en la que puedan emplearse directamente los valores de α y β correspondientes a la superficie de referencia no deformada y a uno o varios estados de deformación de la misma. Para ello se opera del siguiente modo:

De la división de (7) por (9) resulta:

$$\frac{\cos \alpha}{\sen \beta} = \cotg \theta_1 + \gamma \quad (11)$$

Dividiendo (8) por (10):

$$\frac{\cos \alpha_0}{\sen \beta_0} = \cotg \theta_1 \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (11) resulta:

$$\gamma = \frac{\cos \alpha}{\sen \beta} - \frac{\cos \alpha_0}{\sen \beta_0} \quad (13)$$

fórmula que permite determinar el valor de la deformación por cizalla, si se conocen los ángulos que forma la superficie de referencia no deformada con el plano de cizalla (α_0) y con la dirección de cizalla (β_0), así como el par de valores angulares (α, β) para cada superficie cuya deformación quiera determinarse.

MÉTODO GRÁFICO-ANALÍTICO PARA LA DETERMINACIÓN DE γ A PARTIR DE SUPERFICIES DE REFERENCIA DEFORMADAS, UTILIZANDO LAS RELACIONES ANGULARES PARA 2-DIMENSIONES

Si bien el estudio de la variación en orientación de una superficie de referencia al ser sometida a distintos valores de deformación por cizalla requiere emplear las relaciones anteriormente establecidas, para determinaciones del valor de γ puede emplearse un método rápido, por reducción del problema a dos dimensiones.

Por la expresión (12) se conoce la relación:

$$\frac{\cos \alpha_0}{\sen \beta_0} = \cotg \theta_1$$

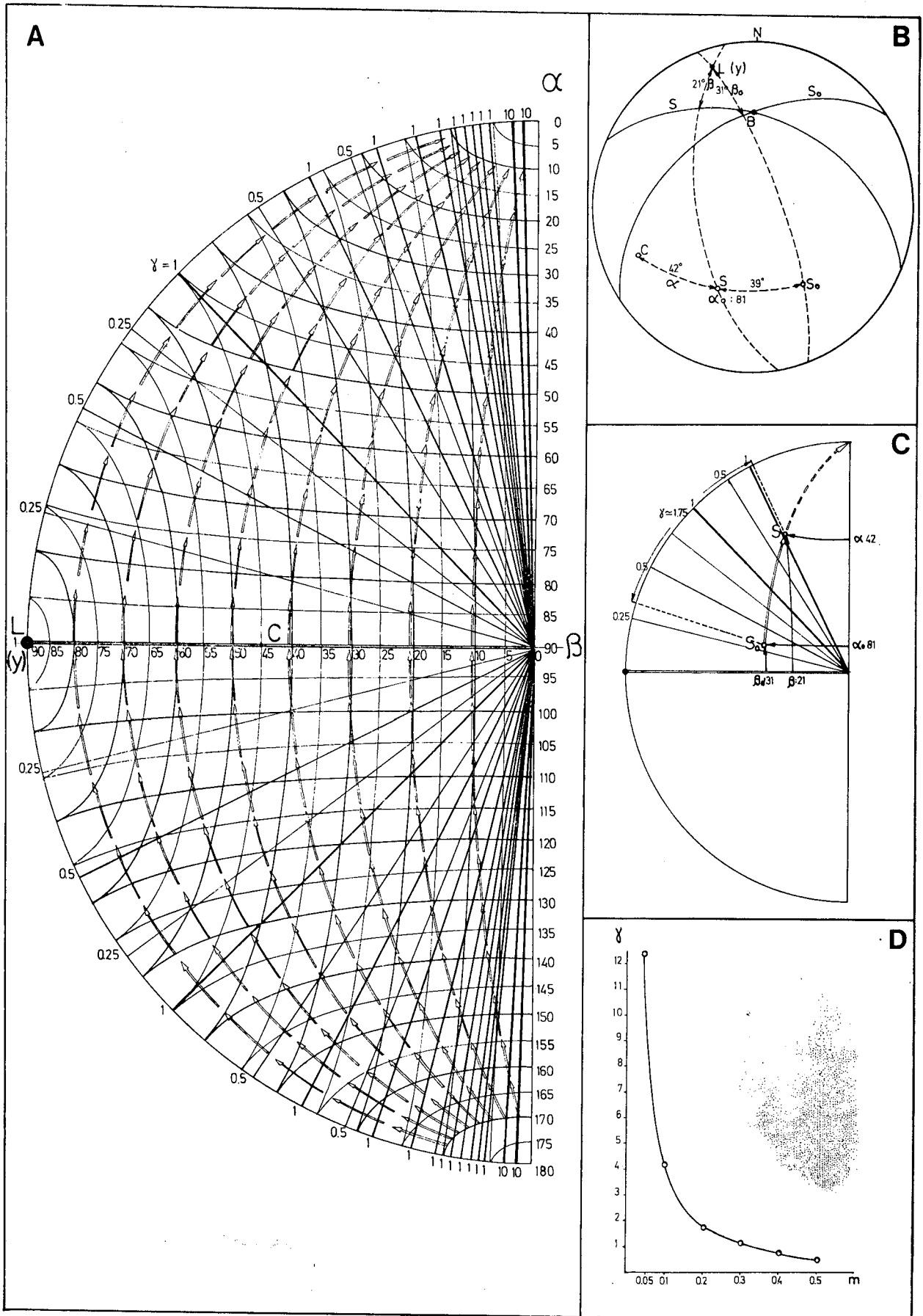


FIG. 2. — Determinación gráfica del valor de γ

A. — Gráfico construido sobre proyección estereográfica equiareal, destinado a la evaluación aproximada del valor de γ . Descripción en el texto.
 B. — Determinación gráfica de los ángulos α_0 , β_0 y α , β , utilizando una proyección estereográfica equiareal. Procedimiento: los elementos

De un modo análogo puede derivarse una relación que ligue α y β con θ_1 (ver fig. 1).

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \cotg \theta_1 \quad (14)$$

Sustituyendo (12) y (14) en la expresión general (13) resulta:

$$\gamma = \cotg \theta_1 - \cotg \theta_2 \quad (15)$$

Esta expresión es equivalente a la que relaciona el ángulo inicial y final que forma una línea con respecto a la dirección de cizalla para distintos valores de γ , en dos dimensiones (ver RAMSAY (1967) expresión 3-71, p. 88). De ello se desprende que el valor de la deformación por cizalla es dependiente de la variación del ángulo θ_1 e independiente del valor de θ_2 . Esto permite aplicar la resolución gráfica para 2-dimensiones, previa determinación de los valores de θ_1 y θ_2 , los cuales pueden ser hallados haciendo uso de las fórmulas (12) y (14) o bien deduciéndolos directamente mediante el empleo de la proyección estereográfica. La solución gráfica a la ecuación (15) ha sido obtenida por RAMSAY (1967) (ver fig. 3-24, p. 87).

MÉTODO GRÁFICO PARA LA EVALUACIÓN APROXIMADA DE γ

Mediante las relaciones angulares anteriormente establecidas y haciendo uso de la proyección estereográfica, es posible obtener un método gráfico válido para una evaluación aproximada del valor de γ . Este sistema presenta, sin embargo, limitaciones por cuanto en un gráfico sólo pueden representarse los sucesivos incrementos de γ referidos a determinadas orientaciones de las superficies de referencia. No obstante, presenta la utilidad de visualizar el cambio de orientación de la superficie de referencia con el incremento de la deformación por cizalla, permitiendo además determinar el ángulo entre la dirección de cizalla y el eje de zona de las superficies de referencia deformadas, es decir, la relación angular entre el eje cinemático a y el eje B del plegamiento de S en los márgenes de la zona de cizalla.

El gráfico consta de un semicírculo, en el cual pueden representarse todas las orientaciones posibles de las superficies de referencia con respecto al plano de cizalla (C) que viene representado por el radio E-W perpendicular al diámetro del semicírculo (N-S).

La dirección de movimiento (eje de coordenadas y) viene representada por el punto L sobre el plano de cizalla. Los círculos menores representan isogonas de los ángulos α y β , en intervalos de 5° en 5° . Sus valores van de 0° a 180° para α , y de 0° a 90° para β . La posición de una superficie de referencia viene dada por el punto de intersección de las isogonas correspondientes a los valores de α y β del plano en cuestión. Las líneas de flechas que se disponen según círculos máximos son indicadoras de las sucesivas posiciones que ocupa un plano S al incrementar la deformación. Las líneas radiales trazadas con distintos grosores representan líneas de igual incremento de deformación por cizalla, de modo que para que un plano situado sobre un radio grueso ($\gamma = 1$) cambie su orientación hasta situarse sobre el radio grueso contiguo siguiendo su correspondiente trayectoria de deformación, es necesario que sufra una deformación de $\gamma = 1$. Las cifras en los extremos de los radios indican el valor del incremento de γ . Finalmente el ángulo entre la dirección de movimiento y el eje de zona (B) viene dado por la lectura en grados de la distancia del centro del semicírculo al punto de intersección de su correspondiente traza de deformación con el plano de cizalla.

A modo de ejemplo aclaratorio al método gráfico se exponen en las figuras 2B y 2C, los pasos realizados para la determinación del valor de γ a partir de mediciones realizadas en uno de los márgenes de la banda milonítica de Cala Serena que afecta a rocas metamórficas esquistosas hercínicas de la península del cabo de Creus (ver CARRERAS, 1974 y CARRERAS y SANTANACH, 1973). En la figura 2D se expone a título complementario, la variación del valor de la deformación en función de la proximidad al borde de la banda milonítica citada en el ejemplo anterior. En este caso los valores han sido calculados mediante el empleo de la expresión (13).

BIBLIOGRAFÍA

- CARRERAS, J. (1974): Petrología y análisis estructural de las rocas metamórficas de la zona del Cabo de Creus (Prov. Gerona). Resumen Tes. doct., *Secret. Publ. Interc. Cient. Ext. Univers.*, Univ. Barcelona, 9 pp.
- CARRERAS, J., y SANTANACH, P. F. (1973): Micropliegues y movimiento en los cizallamientos profundos del Cabo de Creus (prov. Gerona, España). *Est. Geol.*, XXIX, pp. 439-450.
- RAMSAY, J. G. (1967): *Folding and Fracturing of Rocks*, McGraw-Hill Book Co., New York, 568 pp.
- RAMSAY, J. G., y GRAHAM, R. H. (1970): Strain variation in shear belts, *Canadian Journ. Earth Sc.*, 7, pp. 786-813.

Recibido para su publicación: 2 de abril de 1975.

conocidos son las orientaciones de So, S, C y L. Los ángulos α_0 y α se determinan por lectura directa sobre el círculo máximo que contiene los polos de C, S y So. Los valores de β_0 y β se miden sobre los círculos máximos que contienen respectivamente L y So y L y S. Los valores respectivos se hallan por las distancias en grados entre L y la proyección de S.

C. — Manejo del gráfico 2A, utilizando como ejemplo los valores angulares determinados en 2B. — Los puntos So y S vienen determinados respectivamente por los pares de valores (α_0, β_0) y (α, β) . El círculo máximo que contiene ambos puntos indica la traza de la deformación. Del número de intersecciones de incrementos de γ representados por radios, puede deducirse el valor de γ .

D. — Ejemplo de la variación de γ en función de la distancia en metros a un borde de la banda milonítica de Cala Serena. Los valores representados han sido determinados analíticamente mediante la expresión (13). Los datos pertenecientes al plano situado a 0,2 m han sido utilizados para la representación gráfica presentada en las figuras anteriores.