

# ACTA GEOLOGICA HISPANICA

INSTITUTO «JAIME ALMERA»  
(CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS)

Año XII - N.ºs 4-6

Julio-Diciembre de 1977

Depósito legal: B. 6681-1966

## Algunas consideraciones sobre el tratamiento estadístico de datos direccionales en geología

por L. SOLÉ SUGRAÑES

Instituto de Investigaciones Geológicas "Jaime Almera", C.S.I.C. Gran Vía, 585. Barcelona-7.

El geólogo, sobre todo el geólogo estructural y el sedimentólogo, utiliza con gran frecuencia datos referidos a direcciones (buzamientos, direcciones de ejes, indicativos de corrientes de aporte, etc.), ante los que suele plantearse dos problemas básicos: 1.º Si existe realmente una dirección preferente en las direcciones muestreadas, y 2.º caso de existir tal dirección preferente cuál es y con qué margen de confianza puede aceptarse. Otros problemas que suelen plantearse son derivaciones o generalizaciones de los anteriores, tal como la comparación de distintas muestras o la significación geométrica de una determinada distribución.

PINCUS (1951, 1956) fue de los primeros geólogos en presentar algunas soluciones a tales problemas partiendo de los supuestos de la estadística clásica. Sin embargo, la falta de rigor en la aplicación de los tests estadísticos convencionales a los datos direccionales fue criticado por algunos autores (RODGERS, 1952).

La aplicación de los tests de von Mises y Rayleigh por CURRAY (1956) y DURAND y GREENWOOD (1958) permitieron plantear satisfactoriamente una serie de tratamientos estadísticos a datos direccionales bidimensionales (por ejemplo, azimut o inclinación).

Sin embargo, las propiedades de la distribución esférica expuestas por FISHER (1953), no fueron aplicadas en geología hasta 1964, en que IRVING las utiliza en el tratamiento estadístico de mediciones paleomagnéticas.

Dos años más tarde, WATSON (1966) y VISTELIUS

(1966) generalizaron las propiedades de la distribución esférica para su utilización en problemas geológicos, calculando estadísticos que permiten tanto conocer el grado de fiabilidad de un valor medio como poner de manifiesto la existencia de una orientación preferente.

En el presente trabajo se presentan de una forma esquemática los principales estadísticos basados en las distribuciones circular (o de von Mises) y esférica (o de Fisher) discutiéndose su aplicación en problemas geológicos clásicos.

### TRATAMIENTOS NO VECTORIALES

Los tratamientos no vectoriales son los que requieren menor complejidad de cálculo, sin embargo no permiten la utilización de estadísticos basados en las distribuciones circulares y esféricas. Por este motivo, y desde un punto de vista puramente estadístico, los tratamientos no vectoriales son obsoletos, aunque por su simplicidad muchos geólogos siguen utilizándolos, por ello se ha creído conveniente exponer a continuación, aunque sea muy someramente, aquellos casos en los que se suelen seguir utilizando.

El caso más común lo constituyen los datos direccionales en un espacio de dos dimensiones en el cual cada observación queda definida por el ángulo que forma con una dirección de referencia del espacio. Lo más común en geología es que se trate de la dirección

de un accidente o indicador definido por su azimut (el ángulo que la dirección de la observación forma con la dirección norte en el plano horizontal) o bien de la inclinación de un plano definido por su ángulo de buzamiento (ángulo que forma la línea de máxima pendiente con la horizontal en el plano vertical que contenga a ambas).

En el caso de que las observaciones se presenten relativamente agrupadas, la media aritmética del ángulo director representa una buena estimación de la dirección real. Sin embargo, el sistema clásico utilizado para calcular la media aritmética no puede emplearse en este caso, ya que la dirección angular es una función continua (los valores extremos  $0^\circ$  y  $360^\circ$  no representan dos direcciones extremas y opuestas sino que son contiguas). Esto puede obviarse definiendo *a priori* una dirección media tentativa y dando valores positivos y negativos a cada observación según se aparten a un lado u otro de la media así definida. Luego se calcula la media aritmética de estas desviaciones, con cuyo valor puede corregirse la media provisional para obtener una estimación media definitiva.

En el caso de observaciones en un espacio de tres dimensiones la dirección media no puede ser calculada a partir de un tratamiento no vectorial, por ello la mayoría de los geólogos utilizan una estimación visual a partir de la proyección estereográfica de los datos direccionales definidos por un azimut y buzamiento.

A partir de los datos representados en proyección estereográfica equiareal puede aplicarse un test de uniformidad semejante al descrito por PINCUS (1956) utilizando una proyección ortogonal Lambert. En este caso se toma como principio del test de uniformidad el que la distribución aleatoria en un espacio de dos dimensiones obedece a la distribución de Poisson. Sin embargo, estrictamente éste es el punto crítico del test, ya que si se admite que la distribución aleatoria de una población uniforme sobre una superficie esférica obedece la ley de Fisher, no queda demostrado que la proyección en el plano de los puntos distribuidos aleatoriamente sobre la superficie esférica se ajuste a la distribución de Poisson. No obstante, distintas pruebas experimentales (ALLDREDGE *et al.*, 1974) prueban que la distribución resultante no se aleja sustancialmente de la distribución de Poisson y que ésta puede utilizarse a modo de primera aproximación por su simplicidad de cálculo.

#### TRATAMIENTO VECTORIAL

Cualquier observación direccional utilizada en geología puede ser considerada como un vector unitario, que pasa por el origen del sistema de coordenadas utilizado como sistema de referencia, y que queda totalmente definido por sus cosenos directores. En los casos en los que convenga ponderar distintamente unas me-

didias de otras, pueden utilizarse vectores no unitarios, sin que por ello varíe el tratamiento y significación estadística.

Un vector unitario que pasa por el origen de coordenadas se define por sus cosenos directores  $l$ ,  $m$ ,  $n$  en que  $l$  es el coseno del ángulo formado por el vector con la dirección norte,  $m$  es el coseno del ángulo que forma con la dirección este y  $n$  es el coseno del ángulo que forma con la dirección vertical. Así, una línea de azimut  $T$  e inclinación  $P$  tendrá por cosenos directores

$$l = \cos T \cdot \cos P \quad (1)$$

$$m = \sin T \cdot \cos P \quad (2)$$

$$n = \sin P \quad (3)$$

mientras que los cosenos directores del polo de un plano de dirección  $T$  y buzamiento  $P$  serán

$$l = \sin T \cdot \sin P \quad (1')$$

$$m = \cos T \cdot \sin P \quad (2')$$

$$n = \cos P \quad (3')$$

la longitud  $R$  del vector así definido es

$$R = (l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

En el caso de direcciones bidimensionales, el vector consta de dos únicos términos,  $l$  y  $m$  representando respectivamente el coseno y el seno del ángulo que el vector forma con la dirección de referencia. La suma de ambos cuadrados será también igual a uno, longitud del vector unitario.

El tratamiento vectorial permite calcular con facilidad el vector medio como suma de los distintos vectores que componen la población estudiada.

Sean  $N$  vectores  $\mathbf{r}_i$  definidos por  $(l_i \ m_i \ n_i)$ . El vector suma será

$$\mathbf{R} (\sum_{i=1}^N l_i \ \sum m_i \ \sum n_i)$$

de tal forma que su longitud será

$$R = ((\sum l_i)^2 + (\sum m_i)^2 + (\sum n_i)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

y su dirección e inclinación serán

$$\bar{T} = \text{tg}^{-1} \frac{\sum m_i}{\sum l_i} \quad (5)$$

$$\bar{P} = \text{sen}^{-1} \frac{\sum n_i}{N}$$

#### Distribución circular o de Von Misses

La distribución circular, también llamada distribución circular normal o de *von Misses*, se caracteriza por una función de densidad

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp(k \cdot \cos(\theta - \theta_0)) \quad (6)$$

en donde  $I_0(k)$  es una función Bessel de un parámetro  $k$  positivo,  $\theta_0$  es la orientación media y  $\theta$  es una orientación aleatoria cualquiera.

Para un intervalo  $\theta$  determinado, la probabilidad  $\Phi(\theta)$  de la función  $f(\theta)$  será:

$$\Phi\theta = \frac{\exp(k \cdot \cos(\theta - \theta_0))}{2\pi I_0(k)} d\theta$$

esta función tiende a la función de la distribución normal para valores de  $k$  superiores a 4 (VISTELIUS, 1966).  $k$  es un parámetro que depende de la uniformidad de la distribución: así, para  $k = 0$ ,  $f(\theta)$  será constante, lo que indica que la densidad será constante en cualquier sector circular considerado. No existe, por tanto, una dirección media u orientación preferente definida. Si  $k$  es mayor que cero,  $f(\theta)$  presenta un valor máximo para  $\theta = \theta_0$  y un valor mínimo para  $\theta = \theta_0 + \pi$ .

Otro parámetro indicativo de la dispersión o agrupación de las observaciones alrededor de un valor medio lo constituye la relación entre la longitud del vector suma ( $R$ ) y el número de observaciones ( $N$ ). Si la dirección de todas las observaciones fuera la misma,  $R$  sería igual a  $N$ , mientras que en una distribución perfectamente homogénea  $R$  tiende a cero.

De la función de la distribución circular (6) puede deducirse que el parámetro  $k$  debe satisfacer la relación:

$$\frac{R}{N} = \frac{I_0'(K)}{I_0(K)} \quad (7)$$

que se ha representado gráficamente en la fig. 1. Por otra parte, según WATSON (1966), la longitud  $R$  del vector resultante obedece a una distribución del tipo

$$(N/2 X^2(\alpha/2))^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

que permite desestimar la hipótesis nula de distribución uniforme para un umbral de probabilidad  $\alpha$  si el valor de  $R$  supera para un determinado valor de  $\alpha$  y  $N$  el de la expresión (8).

La probabilidad con que puede esperarse una determinada desviación angular  $\Theta$  respecto la dirección media puede abordarse a partir de las siguientes relaciones del parámetro  $k$ :

$$\begin{aligned} 2K(1 - \cos \Theta) &\sim X^2_1 \\ 2K(N - R) &\sim X^2(N - 1) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1 - \cos \Theta}{(N - R)(N - 1)} \sim \frac{X^2_1(N - 1)}{X^2_N} = F(\alpha|1, N - 1)$$

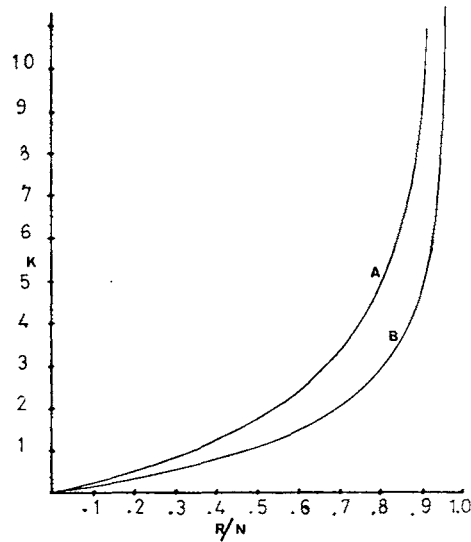


FIG. 1. — Relación entre el parámetro  $k$  y  $R/N$ . A. Distribución esférica  $R/N = \text{Coth } k - 1/k$ . B. Distribución circular,  $R/N = I_0'(k)/I_0(k)$ .

DURAND and GREENWOOD (1958) proponen una adaptación del test de Rayleigh que aporta también cierta información sobre estos mismos aspectos del problema y que se revela como más potente para muestras pequeñas.

El test de Rayleigh fue propuesto inicialmente para calcular la probabilidad de obtener una amplitud de onda superior a un determinado valor mezclando ondas isoperiódicas

$$\Pr(R < r) = 1 - \exp(-r^2/N)$$

siendo  $r$  la amplitud cuya probabilidad se calcula y  $n$  el número de fases. En el caso de direcciones  $r$  será el valor límite de la longitud del vector de probabilidad  $\Pr$  y  $N$  el número de vectores unitarios u observaciones. En la figura 2 se representan gráficamente las relaciones entre  $N$  y  $r/N$  para distintos umbrales de probabilidad. Si para un determinado valor de  $N$  el valor de la relación  $r/N$  supera el correspondiente a un determinado umbral de probabilidad  $\Pr(\alpha)$ , con un margen de error no superior a  $\Pr(\alpha)$  puede descartarse la hipótesis nula de una distribución uniforme muestreada aleatoriamente y admitirse que existe una orientación preferente.

#### Distribución esférica

Una serie de puntos distribuidos aleatoriamente sobre una superficie esférica se dice que presentan una distribución esférica del tipo definido por FISHER (1953) cuando su función de densidad es

$$f(\theta) = \frac{k}{4\pi \cdot \sinh k} \exp(k \cdot \cos \theta) \quad (9)$$

esta distribución resulta de la generalización de la distribución circular de von Misses. IRVING (1964) y WATSON (1966) probaron que corresponde a la distribución que presenta una población uniforme de vectores unitarios muestreada al azar en un espacio tridimensional. La probabilidad  $\Phi(\theta)$  de  $f(\theta)$  para un intervalo comprendido entre  $\theta$  y  $d\theta$  será:

$$\Phi(\theta) = \frac{k}{2 \cdot \sinh k} \exp(k \cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

k, al igual que en la distribución circular, es un argumento positivo que depende del grado de agrupación u homogeneidad de la muestra. Una estimación de k puede obtenerse de la relación

$$\operatorname{cotgh} k - 1/k = R/N \quad (10)$$

cuyos valores se han representado gráficamente en la figura 1. Para altos valores de N (superiores a 50) y valores de k mayores de 4, puede obtenerse una buena estimación a partir de

$$k = \frac{N-1}{N-R}$$

En los casos en que se conoce la dirección real puede obtenerse una estimación de la homogeneidad de la distribución a partir de

$$k' = \frac{N}{N-R \cdot \cos \theta'}$$

siendo  $\theta'$  el ángulo entre la dirección real y la dirección media estimada a partir del vector suma **R**.

Fisher calcula los radios de los círculos que contienen el 50, 63 y 95 % de la información a partir de las relaciones

$$\begin{aligned} \theta_{50} &= 6.75 \cdot k^{-1/2} \\ \theta_{63} &= 81 \cdot k^{-1/2} \\ \theta_{95} &= 140 \cdot k^{-1/2} \end{aligned}$$

denominando a  $\theta_{63}$  la desviación estándar circular, equivalente a la desviación estándar en la distribución normal. Asimismo, también define el diámetro angular del cono dentro del que se halla contenida la dirección verdadera para un umbral de probabilidad  $1 - P$

$$\cos \alpha (1 - P) = 1 - \frac{N-R}{R} \left\{ \left( \frac{1}{P} \right)^{\frac{1}{N-1}} - 1 \right\}$$

WILSON (1959) propone los valores  $\delta$  y  $\epsilon$  como equivalentes de  $\theta_{63}$  y  $\alpha_{63}$  respectivamente

$$\begin{aligned} \delta &= \cos^{-1} (R/N) \\ \epsilon &= \delta N^{-1/2} \end{aligned}$$

para valores grandes de N los valores propuestos por Wilson prácticamente coinciden con los de Fisher, sin embargo, para muestras pequeñas los valores de Wilson son algo más aconsejables.

### Cálculo matricial

La fórmula (9) de la distribución esférica puede escribirse en función de los cosenos directores.

$$f(\theta) = \frac{k}{4\pi \sinh k} \exp(l\lambda + m\mu + n\nu) \quad (11)$$

siendo l, m y n los cosenos directores de una observación **L**, y  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  los de la dirección real  $\Lambda$ .

En el caso de un muestreo aleatorio la estimación de  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$  puede obtenerse minimizando por mínimos cuadrados la función  $f(\theta)$ .

Haciendo  $Q = \sum (\cos \theta_i - \cos \theta)^2$  o lo que es lo mismo

$$Q = \sum [\lambda l_i + \mu m_i + \nu n_i - \sum (\lambda l_i + \mu m_i + \nu n_i)^2 / N]^2$$

el valor mínimo de la expresión (11) se obtendrá cuando el valor de Q sea también mínimo. Este mínimo valor de Q puede obtenerse igualando a cero la derivada de la función Q respecto  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $\nu$ . De esta forma se obtiene la siguiente expresión:

$$[L \cdot L'] \cdot \Lambda = 0$$

donde  $L'$  es la matriz traspuesta del vector **L**.

Esta expresión se cumple cuando  $(\lambda, \mu, \nu)$  coincide con el vector propio (eigenvector) de la matriz  $A = L \cdot L'$  asociado a su valor propio (eigenvalue) máximo.

La estimación de la dirección media por este método, es mucho más laboriosa que en el sistema expuesto anteriormente (5).

Sin embargo, el método matricial presenta ventajas adicionales en determinados casos. La relación entre los valores propios de la matriz  $A = L \cdot L'$  depende de la forma de la distribución. Cuando todas las observaciones se agrupan alrededor de un valor medio, se obtiene un valor propio alto y dos de pequeños, mientras que cuando las observaciones se distribuyen todas sobre un mismo plano (caso de los polos de una superficie plegada cilíndricamente) existen dos valores propios casi iguales y uno mucho más pequeño tendiendo a cero.

En el caso de superficies plegadas, ya sea cilíndrica o cónicamente el vector propio asociado al valor propio más pequeño es paralelo al eje de plegamiento, propie-

dad que puede utilizarse para calcular con precisión el cjc de pliegues cónicos (véase ejemplo 2).

Las relaciones entre los valores propios y el tipo de distribución son complejas, ya que dependen tanto del tipo de distribución como de la dispersión de las observaciones respecto un valor central. Ha podido constatarse que existe una muy buena correlación entre la diferencia normalizada de los valores propios y el semiángulo apical de la superficie cónica. Si la diferencia entre los valores propios se expresa como la diferencia entre el valor máximo y mínimo partido por el número de datos (la suma de los tres valores propios es igual al número de datos) y el cuadrado de este cociente se correlaciona con el cuadrado del coseno del semiángulo apical, se obtiene para una serie de 15 casos un coeficiente de correlación de 0.94, que es altamente significativo de una correlación casi lineal. Sin embargo, no pueden incluirse en esta misma correlacionalidad casos con observaciones poco numerosas (menos de 25) y fuertemente agrupadas alrededor de un valor central (parámetro  $k$  mayor de 10), ya que en estos casos la diferencia entre los valores propios es menor de lo que cabría esperar en un caso de ángulo apical igual a cero.

CRUDEN (1968) propone que para comprobar la coplanaridad de las observaciones, o dicho de otra forma, si el pliegue es cilíndrico o no, puede aplicarse el siguiente test:

$$k \cdot (\text{min. valor propio}) < X^2(\alpha | N - 2)$$

si la anterior desigualdad se cumple puede admitirse que el pliegue es cilíndrico con una probabilidad  $\alpha$ .

#### COMPARACIÓN DE MUESTRAS DISTINTAS

En tratamientos estadísticos es frecuente el caso de comparación de muestras para determinar si se trata de subconjuntos de un mismo conjunto o bien puede, con un determinado margen de probabilidad, aceptarse la existencia de distintos conjuntos. En el caso del estudio de las direcciones medias se trataría de saber con qué probabilidad se puede decir que las direcciones medias de dos muestras pueden ser consideradas como equivalentes o no.

#### Comparación de las dispersiones

Previa a la comparación de las direcciones medias debe establecerse que la dispersión en ambas muestras es equivalente, o sea que con una probabilidad  $\alpha$  determinada puede aceptarse la hipótesis nula  $H_0: k_1 = k_2$ . Para ello puede utilizarse la propiedad de la distribución de  $k$ .

$$2k(N - R) \sim X^2(\alpha | N - 1)$$

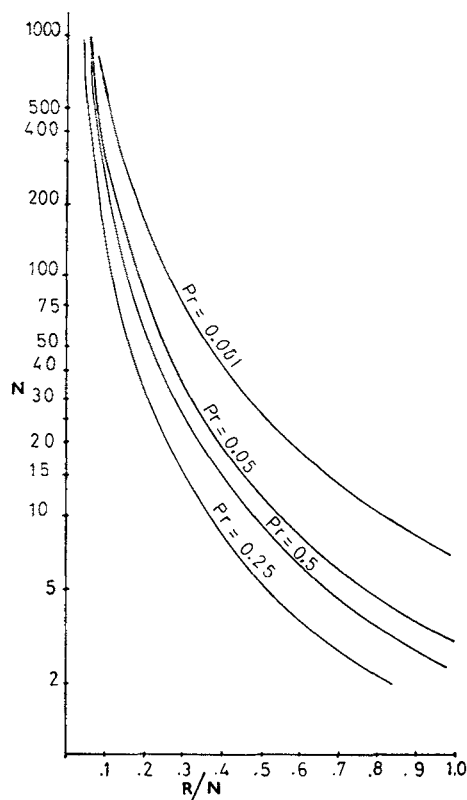


Fig. 2. — Test de Rayleigh para uniformidad para distintos umbrales de probabilidad.  $\text{Pr}(R > r) = 1 - \exp(-r^2/N)$ .

que en el caso de muestras con distribución circular permite formular la siguiente relación:

$$U = \frac{\frac{N_1 - R_1}{N_1 - 1}}{\frac{N_2 - R_2}{N_2 - 1}} \sim \frac{\frac{X_1^2}{N_1}}{\frac{X_2^2}{N_2}} = F(N_1 - 1, N_2 - 1) \quad (12)$$

Si  $U < F(\frac{1}{2} \alpha | N_1 - 1, N_2 - 1)$  puede aceptarse la hipótesis nula con una probabilidad  $\alpha$ , en caso contrario la hipótesis nula puede desestimarse con una probabilidad de error no superior a  $1 - \alpha$ .

Para el caso de poblaciones con distribución esférica los grados de libertad serán dos menos que el número de datos, pudiéndose escribir:

$$U = \frac{\frac{N_1 - R_1}{N_1 - 1}}{\frac{N_2 - R_2}{N_2 - 1}} \sim \frac{\frac{X_1^2}{N_1}}{\frac{X_2^2}{N_2}} = F(2(N_1 - 2), 2(N_2 - 2)) \quad (13)$$

Si  $U < F(\frac{1}{2} \alpha | 2(N - 2), 2(N - 2))$  puede accep-

tarse como válida la hipótesis nula con un margen de probabilidad  $\alpha$ . Las muestras 1 y 2 deben tomarse de tal forma que  $U > 1$ , tanto para la distribución esférica como para la circular.

### Comparación de las direcciones medias

Si puede aceptarse que las dos muestras poseen una misma distribución, el módulo de los dos vectores resultantes  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  puede compararse a través del siguiente test definiendo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad \text{siendo } R \text{ la longitud de } \mathbf{R} \text{ y}$$

$$N = N_1 + N_2$$

y formulando la hipótesis nula  $H_0$  de modo que el módulo de ambos vectores sea el mismo

$$W = R/N$$

$$Z = (R_1 + R_2)/N \quad (14)$$

para un determinado valor de  $W$  cuanto mayor sea  $Z$  menor será la probabilidad de que ambos vectores tengan el mismo módulo. En las figuras 3 y 4 se han representado los valores críticos de  $z$  (distribución circular y esférica respectivamente), para una probabilidad de .95 y para valores distintos de  $N$ . Si  $Z > z$  (.95), con una probabilidad de error no superior al 10% puede desestimarse la hipótesis nula  $H_0$ .

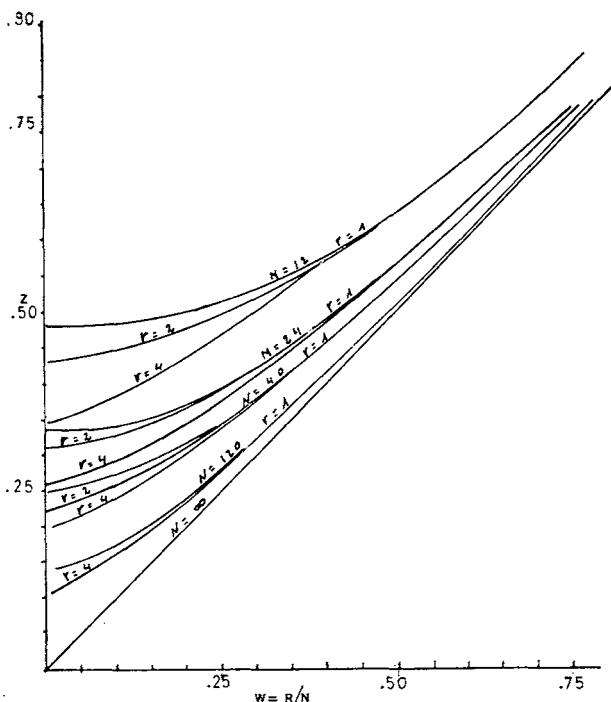


FIG. 3. — Valores críticos de  $Z$ , en muestras con distribución circular, para distintos valores de  $N$  y determinadas relaciones de  $r = N_1/N_2$ .  
 $W = R/N$   $Z = (R_1 + R_2)/N$

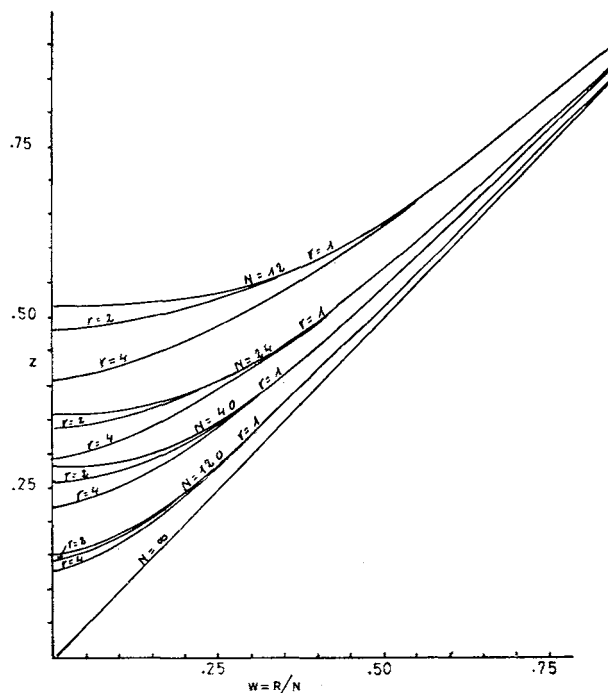


FIG. 4. — Valores críticos de  $Z$ , en muestras con distribución esférica, para distintos valores de  $N$  y determinadas relaciones de  $r = N_1/N_2$ .  
 $W = R/N$   $Z = (R_1 + R_2)/N$

Para valores altos de  $W (> .75)$  puede estimarse el valor crítico de  $z$  para una probabilidad  $\alpha$  a partir de

$$Z\alpha = (W + H)/(1 + H) \quad \text{siendo} \quad (15)$$

$$H = F(\frac{1}{2}\alpha | 1, N-2)/(N-2)$$

El modo de empleo de este test se desarrolla en el ejemplo núm. 1.

### Comparación de más de dos muestras

La comparación de más de dos muestras puede ser tratada análogamente a un análisis de varianza.

Se supone que el parámetro  $k$  se halla formado por una componente  $\beta$  debida a la variabilidad de las distintas localidades entre sí. Si los vectores resultantes de cada una de las  $S$  localidades tienen longitudes  $R_1, R_2, \dots, R_S$  y las  $N = \sum N_i$  observaciones tienen un vector resultante de longitud  $R$ , se pueden establecer las siguientes relaciones

$$\frac{\sum R_i - R}{2(S-1)} = \frac{1}{2}(1/\omega + N/\beta)$$

$$\frac{\sum (N_i - R_i)}{2 \sum (N_i - S)} = \frac{1}{2}\omega$$

con estas estimaciones de  $\omega$  y  $\beta$  se puede obtener una estimación del parámetro de precisión  $k$ .

$$k = \frac{1}{(\omega N)^{-1} + (\beta S)^{-1}}$$

La significación de la varianza entre las distintas localidades puede ser estimada mediante un test de F del tipo

$$F(v_1, v_2) \sim \frac{2(\sum N_i - S)}{2(S-1)} \frac{\sum R_i - R}{\sum(N_i - R_i)}$$

$$v_1 = 2(S-1)$$

$$v_2 = 2(\sum N_i - S)$$

si los valores estimados de F superan para un determinado margen de probabilidad los admitidos por la distribución de F con  $v_1$  y  $v_2$  grados de libertad puede rechazarse la hipótesis de que las poblaciones muestreadas en las distintas localidades procedan de una misma población.

#### EJEMPLO NÚM. 1

En un estudio de las direcciones de alineaciones observadas en fotografías LANDSAT-1 del Nordeste de España, éstas se comparan con direcciones de fallas cartografiadas a 1:50.000 en el macizo de Garraf (Barcelona) y con direcciones de alineaciones medidas en fotografías aéreas convencionales (escala 1:30.000) de la zona de Ponts-Calaf (Depresión del Ebro) (SOLÉ SUGRAÑES, 1978). Los parámetros estimados en las distintas áreas figuran en la tabla I.

TABLA I

Área	$\sum \text{Sen } \theta_i$	$\sum \text{Cos } \theta_i$	$\bar{\theta}$	N	R	R/N	K
Alineaciones							
LANDSAT-1 (A)	165.29	145.5	48.64	232	220.21	.947	9.961
Garraf (B)	201.95	174.45	49.12	279	235.73	.844	3.476
Ponts-Calaf (C)	560.49	445.82	52.47	769	731.88	.952	10.673

$\bar{\theta}$  = Dirección media.

N = Número de mediciones (cada medición viene ponderada por su longitud).

R = Longitud del vector medio.

La observación de la tabla permite apreciar que, mientras las alineaciones LANDSAT y las del área de Ponts-Calaf tienen un grado de dispersión muy parecido, muestran por el contrario las mayores diferencias en cuanto a la orientación del vector medio. Por otro lado, la orientación media de las alineaciones

LANDSAT y de las fallas de Garraf es prácticamente la misma pero en este caso las dispersiones son muy distintas.

El estudio estadístico de la significación de estas dispersiones, según la fórmula 12, presenta los siguientes resultados:

$$U_{(B-A)} = 3.05 \quad U_{(A-C)} = 1.06 \quad U_{(B-C)} = 3.22$$

valores que comparados con la distribución de Fisher presentan las siguientes probabilidades de no ser superados

$$P(U_{(B-A)}) = 0.16 \quad P(U_{(A-C)}) = 0.95 \quad P(U_{(B-C)}) = 0.05$$

Con una probabilidad del 95% sólo puede aceptarse la hipótesis nula, o sea que las dos muestras presentan una misma dispersión, para el caso de las alineaciones LANDSAT (A) y Ponts-Calaf (C). Para estas dos muestras la comparación de las direcciones medias puede efectuarse a partir de la fórmula 14, obteniéndose los siguientes valores:

$$R_{A-C} = 936.12 \quad N = 1001$$

$$W = R/N = .935 \quad Z = (R_a + R_c)/N = .951$$

dado que el valor de W sale fuera del ámbito de utilización de las gráficas de la figura 3 el valor crítico de Z debe calcularse a partir de la fórmula 15, obteniéndose para un umbral de probabilidad de 98% un valor crítico de  $z = .935$ , inferior al valor de Z obtenido al comparar las muestras A y C. Con un margen de error no superior al 2% puede aceptarse que las direcciones reales de A y C son distintas.

Los anteriores sistemas de comparación de las direcciones medias no pueden ser aplicados directamente a los casos de las muestras A y B ya que no poseen el mismo grado de dispersión. Sin embargo, considerando la dispersión de A, para una probabilidad de error menor al 10%, debe aceptarse una variación de  $\pm 8.28^\circ$  respecto la variación media estimada (fórmula 6). Este valor es muy superior a la diferencia entre las dos direcciones medias estimadas ( $0.48^\circ$ ).

Estas comparaciones permiten desde un punto de vista puramente estadístico sacar las siguientes conclusiones:

— las fallas de Garraf y las alineaciones LANDSAT presentan la misma dirección, pero las fallas cartografiadas a 1:50.000 presentan mayor dispersión que las alineaciones visibles en las imágenes LANDSAT.

— las alineaciones LANDSAT y las alineaciones fotogeológicas del área Ponts-Calaf presentan la misma dispersión, sin embargo, sus direcciones medias difieren en  $3.8^\circ$  y con un error no superior al 2% puede admitirse que esta diferencia es significativa.

Una probable interpretación de estos hechos puede ser:

— las alineaciones fotogeológicas, tanto en imágenes convencionales como en imágenes LANDSAT, corresponden exactamente a un mismo fenómeno, aunque las direcciones medias de este fenómeno son ligeramente distintas en la Depresión del Ebro y en el área de los Catalánides;

— las fallas cartografiadas a escala 1:50.000 en Garraf no corresponden exactamente al mismo fenómeno reflejado por las alineaciones fotogeológicas, aunque ambos fenómenos presentan una misma alineación media en los Catalánides.

#### EJEMPLO 2.º

En el estudio de la forma de los pliegues en el borde meridional prepirenaico, en el límite entre las provincias de Barcelona y Lérida se sospechaba la presencia de pliegues cónicos debido a la superposición de dos fases de plegamiento, de planos axiales subverticales y cuyas direcciones formarían un ángulo de 45º entre sí. Concretamente se estudió una termina-

podría tratarse de un pliegue cilíndrico, con eje orientado 120º, 30º NW. Al calcular los vectores propios de la matriz de la suma de sus cosenos directores, se observa que el vector propio asociado al mínimo valor difiere significativamente de esta dirección (93, 29 W), pudiéndose suponer que se trata de un pliegue cónico con un semiángulo apical de 80º.

Doblando el número de medidas efectuado en un sector un poco más amplio que el primer muestreo, en la proyección estereográfica de un total de 300 polos (fig. 5, b) se observa claramente la disposición cónica del pliegue sin ningún tipo de dudas. El cálculo estadístico permite definir que se trata de un cono, con semiángulo apical de 76º y cuyo eje se halla orientado N 93º inclinado 35º al W. Esta dirección corresponde plenamente con la dirección este-oeste que caracteriza los pliegues de la fase pirenaica en este sector del Prepirineo.

En este ejemplo se pone en evidencia cómo con un menor número de observaciones, cuando aún no era posible por simple apreciación visual obtener la dirección y naturaleza real del pliegue, mediante el trata-

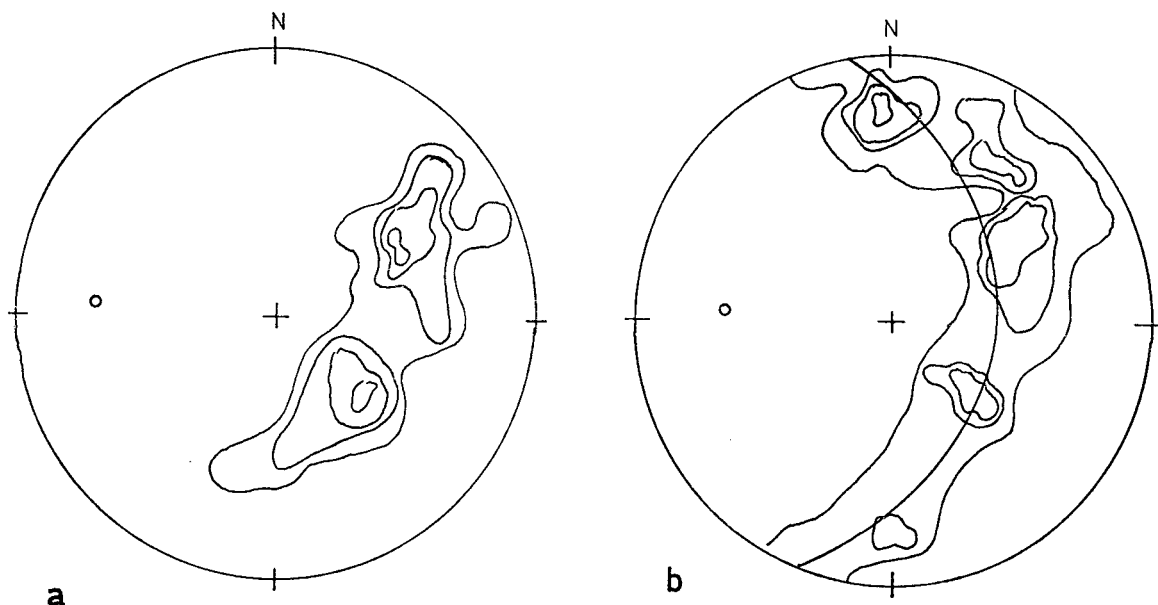


FIG. 5.—Proyecciones equiareales (hemisferio inferior) de polos de estratificación del Carumniense de Sant Cerni (Berga): a) 150 polos, contornos 1,5, 11 y 17 %; dirección del eje N 93º, 29º W (pliegue cónico de 80º de semiángulo apical); b) 300 polos, contornos 1, 3, 5 y 9 %; dirección del eje N 93º, 35º W (pliegue cónico de 76º de semiángulo apical).

ción periclinal en las facies garumnienses al este de Berga (SOLÉ SUGRAÑES, 1972) en que una alternancia de margas y margo-calizas se halla afectada por una esquistosidad espaciada pero bien desarrollada.

A pesar de la apariencia cónica del pliegue la proyección estereográfica de 150 polos de planos de estratificación no pone claramente en evidencia la existencia de un pliegue cónico (fig. 5, a) pudiéndose pensar que

miento estadístico ya se había llegado a establecer la misma dirección media (N 93º) a la que se llega doblando el número de observaciones. Con la mitad de observaciones sólo se cometía un error de 6º en la inclinación del eje del pliegue. Además, el tratamiento estadístico permite establecer que el límite de confianza de esta dirección, con una probabilidad del 95 %, es de  $\pm 9^\circ$ .



## AGRADECIMIENTOS

Los datos utilizados en el ejemplo 2 fueron recogidos por los alumnos J. Escobet y M. Arbucies, a quienes agradezco que me hayan permitido utilizarlos. Parte del trabajo corresponde a estudios realizados mediante una beca March, 1974 (extranjero).

## BIBLIOGRAFÍA

- ALLDREDGE, J. R.; AAHBT, M. A., y PANEK, C. A., 1974. Statistical analysis of axial data. *J. Geol.* 82(4):519-524.
- CRUDEN, D. M., 1968. Methods of calculating the axes of cylindrical folds. A review. *Geol. Soc. Am. Bull.* 79(1): 143-148.
- CURRAY, J. R., 1956. The analysis of two-dimension orientation data. *J. Geol.* 64(2): 117-131.
- DURAND, D., y GREENWOOD, J. A., 1958. Modifications of the Rayleigh test for uniformity in analysis of two-dimensional orientation data. *J. Geol.* 66(3): 229-239.
- FISHER, R. A., 1953. Dispersion on a sphere. *Proc. Roy Soc. London, Ser A* 217: 295-305.
- IRVING, E., 1964. *Paleomagnetism and its applications to geological and geophysical problems*. J. Wiley and Sons. Co. New York. 399 pp.
- PINCUS, H. J., 1951. Statistical methods applied to the study of rock fractures. *Geol. Soc. Am. Bull.* 62: 81-130.
- PINCUS, H. J., 1956. Some vector and arithmetic operations on two-dimensional orientation variates with application to geological data. *J. Geol.* 64: 533-557.
- RODGERS, J., 1952. Statistical methods applied to the study of rock fractures. Discussion. *Geol. Soc. Am. Bull.* 63: 427-429..
- SOLÉ-SUGRAÑES, L., 1972. Nota sobre la discordancia del Eoceno medio del Prepirineo español. *Act. Geol. Hisp.* 7(1): 1-6.
- SOLÉ-SUGRAÑES, L., 1978. Alineaciones y fracturas del sistema Catalán según las imágenes LANDSAT-1. *Tecniterae* 4(22): 6-16.
- VISTELIUS, A. B., 1966. *Structural diagrams*. Pergamon Press. Oxford. 180 pp.
- WATSON, G. S., 1966. The statistics of orientation data. *J. Geol.* 74(5): 786-797.

---

Recibido para su publicación: junio 1977.