Anuario de Psicología
1994, nº *62*, 25-40

Un modelo de los niveles de comprensión de la propiedad conmutativa de la adición

Vicente Bermejo
Mª Oliva Lago
Purificación Rodríguez
Universidad Complutense de Madrid

En esta investigación se analiza el desarrollo y comprensión de la propiedad conmutativa de la suma. Para ello tres grupos de niños de Educación Infantil (EI), 1° y 2° de Educación Primaria (EP) realizaban tres tareas de conmutatividad: Construir, Encontrar y Comparar equivalencias. Asimismo, se tiene en cuenta el tamaño de los pares conmutados para analizar su incidencia en la comprensión de la conmutatividad. Los resultados indican que existen diferencias significativas entre los grupos y las distintas tareas. En general, los datos obtenidos a partir del análisis de los errores y estrategias de los niños confirman de diverso modo los cinco niveles del modelo hipotético propuesto por Bermejo y Rodríguez (1993) sobre la comprensión de la propiedad conmutativa: (1) no equivalencia, (2) equivalencia perceptiva, (3) equivalencia basada en el cómputo del resultado, (4) equivalencia práctica y (5) conmutatividad formal.
Palabras clave: *Desarrollo, adición, propiedad conmutativa, estrategias, errores.*

In this research we analyse the development and understanding of the commutative law of addition by children. To this end three groups of children from EI, first and second course of EP were presented three commutative tasks: construct, find, and compare equivalences. Likewise, we took into account the size of the addends in the commuted pairs to analyse its incidence on children's understanding of commutativity. The results show the existence of significative differences between the groups and the tasks. In general, the analysis of children's errors and strategies offers evidence to partially confirm the five levels of the hypothetical model of understanding commutativity proposed by Bermejo and Rodríguez (1993): (1) no equivalence, (2) perceptual equivalence, (3) computing result-based equivalence, (4) practical equivalence, and (5) formal commutativity.
Key words: *Development, Addition, Commutative Law, Strategies, Errors.*

Dirección de los autores: Vicente Bermejo. Mª Oliva Lago. Purificación Rodríguez. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Facultad de Psicología. Campus de Somosaguas. 28229 Madrid.

La abundante literatura en torno a la competencia aditiva de los niños (véase, p.ej., Bermejo y Rodríguez, 1990a, 1990b) contrasta con la escasa bibliografía sobre las propiedades de la adición, como, por ejemplo, la propiedad conmutativa. De modo que resulta sorprendente la laguna conceptual existente con respecto a esta propiedad.

No obstante, podemos bosquejar dos orientaciones teóricas diferentes en el estudio de la propiedad conmutativa:

a) La que vincula la propiedad conmutativa con la competencia aditiva.

b) La que sostiene que el niño sigue caminos diferentes en la adquisición de la adición y de la propiedad conmutativa.

En el marco de la primera aproximación, se considera la existencia de una cierta relación entre la propiedad conmutativa y la adición, de modo que la adquisición de la primera supondría una cierta competencia aditiva en el niño (Briars y Larkin, 1984; Carpenter, 1986; Riley, Greeno y Heller, 1983; Weaver, 1982). Por ejemplo, Weaver relaciona la propiedad conmutativa y la concepción binaria de la adición. Según este autor, el niño tendría primeramente una *concepción unitaria* de la adición, adquiriendo más tarde una *concepción binaria* de la misma. La primera concepción es más precoz e incompleta, concibiéndose la operación aditiva como un cambio de estado del conjunto inicial que se hace reiterativamente mayor. De ahí que el niño espere resultados diferentes según sumemos «4+12» o «12+4», porque psicológicamente no es lo mismo la acción de añadir 12 elementos a 4, que añadir 4 elementos a 12. En definitiva, el niño puede admitir la equivalencia de este par conmutado, pero no necesariamente la de sus resultados. En cambio, con la concepción binaria de la adición el niño entiende esta operación como resultado de unir dos conjuntos disjuntos, de modo que el orden en que se combinen dichos conjuntos no influye en el resultado de su adición. Desde esta óptica, parece claro que la propiedad conmutativa está vinculada a una concepción binaria de la adición.

Igualmente, las posiciones teóricas de los demás autores suponen la existencia de nexos entre la adición y la propiedad conmutativa. Por ejemplo, algunos relacionan la propiedad conmutativa y la adición con el esquema parte-parte-todo, de modo que la comprensión de ambas supone la posesión de este esquema (Briars y Larkin, 1984, Carpenter, 1986; Riley *et al.*, 1983).

Desde el segundo enfoque se mantiene que la adquisición de la competencia aditiva y de la conmutatividad siguen cursos diferentes (Baroody, 1982; Baroody y Gannon, 1984; Baroody y Ginsburg, 1986). Conforme a este planteamiento, el conocimiento de la conmutatividad no depende directamente de la competencia aditiva, sino del intento de reducir las demandas de ejecución y de la mejora conceptual general que propicia el uso de estrategias más elaboradas. Desde esta óptica, los niños que estén en la etapa de la protoconmutatividad, que es anterior a la comprensión plena de la conmutatividad, saben que el orden en que se adicionan los sumandos no afecta a la obtención del resultado correcto, aunque los sucesivos resultados pueden ser diferentes. Así, en el algoritmo «4+5», los niños que se encuentran en esta etapa admiten que se puede resolver añadiendo al 4 el 5 o bien al 5 el 4, pero aunque consideran que en ambos casos obtendrán un resultado correcto, no asumen que se tratará exactamente del mismo resultado, esto es, «9». Los orígenes de esta concepción podrían arrancar del principio de orden irrelevante del conteo (véase Baroody, 1984; Gelman y Gallistel, 1978), que estipula que una colección de objetos puede contarse siguiendo múltiples órdenes. No obstante, aunque este conocimiento pueden manifestarlo sujetos de corta edad, la comprensión plena del principio tiene lugar más tarde, es decir, a partir del momento en que los niños admiten tanto los distintos órdenes, como la equivalencia de los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

Finalmente, Bermejo y Rodríguez (en prensa-a, en prensa-b) y Rodríguez (1992) consideran que las dos aproximaciones anteriores no son excluyentes, sino que las bases teóricas de ambas fundamentarían mejor la plena comprensión de la propiedad conmutativa. Por un lado, el hecho de que el niño adquiera esta propiedad directamente por razones de economía de tiempo en la resolución de una tarea aditiva, tal como supone la segunda orientación, no excluye una cierta competencia aditiva. Al contrario, el uso de una estrategia u otra para facilitar o mejorar la eficacia en la resolución de un problema, implica probablemente un cierto nivel de conocimientos aditivos en el niño. Por ello, pensamos que la plena comprensión de la propiedad conmutativa supone tanto la adquisición del esquema parte-parte-todo, como la posesión de una concepción binaria de la adición. Por otro, si hablamos de niveles precoces en la comprensión de esta propiedad, entonces no sería estrictamente necesaria esta competencia aditiva, tal como defiende la segunda orientación. En suma, el primer enfoque parece centrarse en la manifestación plena de la conmutatividad, mientras que el segundo lo hace más bien en una manifestación precoz.

A la diferenciación que acabamos de establecer subyace la creencia de que la propiedad conmutativa no es un proceso de todo o nada, sino que supone un proceso más o menos lento hasta la completa comprensión de la misma. En este sentido, Baroody y Gannon (1984), basándose en que los niños admiten la equivalencia de un par conmutado a partir de la equivalencia de sus resultados, proponen una secuencia evolutiva en la adquisición de la propiedad conmutativa de la adición de tres niveles:

1. Los pares conmutados son problemas psicológicamente diferentes para los niños, de modo que $7+2$ es considerado como diferente a $2+7$. Para estos niños, en el primer caso se trata de «siete y dos más», mientras que en el segundo es «dos y siete más», lo que supondría resultados diferentes.

2. El segundo nivel lo denominan «protoconmutatividad», que sería como una noción primitiva de la conmutatividad, según la cual el orden de los sumandos no afecta a la corrección de la operación aditiva, pero los resultados podrían ser distintos.

3. Finalmente, el niño se centraría en el resultado de la adición, entendiendo la noción de conmutatividad en el sentido matemático, lo que supondría ya la posesión de una concepción binaria de la adición.

Asimismo, Bermejo y Rodríguez (1993) proponen un modelo hipotético de cinco niveles en la comprensión de la propiedad conmutativa de la adición. Partiendo de la definición formal de esta propiedad, según la cual $A+B=B+A$, evalúan el conocimiento de los niños en torno a esta propiedad analizando cómo coordinan los dos componentes de la propiedad conmutativa: los sumandos y los resultados. La integración de estos componentes conlleva: (1) considerar simultáneamente los sumandos de los dos pares conmutados, y (2) admitir la equivalencia de los resultados sin resolver para ello las operaciones.

Este criterio parece razonable, ya que si los niños hacen sólo referencia al resultado, la equivalencia de los mismos no es razón suficiente para admitir que estos niños han comprendido la irrelevancia del orden de los sumandos, que constituye un elemento esencial de la propiedad conmutativa. Por otra parte, si se centran exclusivamente en los sumandos, la aceptación sin más de la irrelevancia del orden de los mismos no garantiza que para estos niños los resultados sean equivalentes.

Teniendo en cuenta estos criterios, Bermejo y Rodríguez (1993) avanzan un modelo hipotético de cinco niveles en torno a la comprensión de la propiedad conmutativa de la adición:

1. *No equivalencia*, de modo que los niños en este nivel no aceptan la equivalencia de los resultados de los pares conmutados, porque los sumandos están invertidos. En otras palabras, la inversión implica resultados diferentes. Este nivel equivaldría a la primera etapa de la secuencia propuesta por Baroody y Gannon (1984).

2. *Equivalencia perceptiva.* Ahora los niños aceptan la equivalencia de los dos pares conmutados si están presentes exactamente los mismos términos en ambos. Para verificarlo llevan a cabo una comparación estática y elemento a elemento, desconsiderando el orden de los sumandos. Por ejemplo, los niños justifican la equivalencia argumentando que tanto los números, uno a uno, como los signos son iguales. Por ejemplo, la respuesta de una niña de Educación Infantil (EI) en el par conmutado «6+3 vs 3+6» fue la siguiente: «Sí, hay lo mismo, porque 6-6 (señala los números con el dedo), más y más, 3 y 3». Igualmente los niños de este nivel rechazan la equivalencia cuando en el problema anterior tan sólo en uno de los pares conmutados figura el signo de igualdad y el resultado (i.e., 6+3=9 vs 3+6). Este patrón de respuestas aparece principalmente entre los niños de EI (una media del 46.5 % de los ensayos), menos frecuentemente en los niños de 1° de Educación Primaria (EP) (29.3 %) y apenas se manifiesta en los de 2° de EP (13.9 %).

3. *Equivalencia basada en el resultado.* Los niños necesitan calcular uno o los dos resultados para pronunciarse sobre la equivalencia de los pares conmutados. A esta necesidad de hallar el resultado parece subyacer una concepción unaria de la adición. Por otra parte, este nivel correspondería a la etapa de protoconmutatividad de Baroody y Gannon (1984). Es decir, para estos niños la equivalencia de los sumandos no supone necesariamente una equivalencia de resultados. La evidencia empírica correspondiente a este nivel es la siguiente: una media del 1.2 %, 8.6 % y 11.8 % de los ensayos para los grupos de EI, 1° de EP y 2° de EP, respectivamente.

4. *Equivalencia práctica.* En este nivel los niños afirman la equivalencia entre los pares conmutados sin operar, indicando simplemente que los sumandos son los mismos (una media del 38.9 %, 39.6 % y 30 % de los ensayos para los grupos de EI, 1° y 2° de EP) o que el resultado es el mismo (una media de 13.1 %, 20.2 % y 30.8 % de los ensayos para los grupos de EI, 1° y 2° de EP), sin prestar

atención, por ejemplo, a los signos como los niños del nivel 2; pero aún no coordinan explícitamente los sumandos y los resultados.

5. *Conmutatividad formal.* Ahora el niño establece la propiedad conmutativa de la adición, coordinando explícitamente sumandos y resultados, de modo que argumentan que «2+7 es lo mismo que 7+2». Este nivel se corresponde con la etapa tercera de Baroody y Gannon (1984). Nuestros datos indican que este nivel se encuentra presente principalmente en 2° de EP (una media de 13.5 % de los ensayos), es menos frecuente en 1° de EP (una media de 2.2 % de los ensayos) e inexistente en el grupo de EI. El presente trabajo pretende analizar de modo directo y minucioso los pasos evolutivos que suelen dar los niños en la comprensión de la propiedad conmutativa. Este análisis nos permitirá determinar o verificar si efectivamente los datos empíricos obtenidos confirman el modelo de cinco niveles propuesto por Bermejo y Rodríguez.

Para ello, analizamos el comportamiento de tres grupos de sujetos en tres tareas de conmutatividad (i.e., Construir, Encontrar y Comparar Equivalencias), que son presentadas con conjuntos grandes y pequeños. Con respecto al factor magnitud de los sumandos, Ginsburg (1982) afirma que los escolares sólo son competentes con respecto a la propiedad conmutativa cuando se trata de conjuntos pequeños; mientras que Baroody (1982) encuentra que incluso los preescolares podían mostrar dicho conocimiento ante conjuntos grandes. La presencia de conjuntos grandes y pequeños en este trabajo nos permitirá analizar la incidencia del factor magnitud en la comprensión de la conmutatividad, y decidir asimismo sobre la objetividad de las dos posiciones mencionadas anteriormente.

En cuanto a las tareas, presentamos dos tipos de tareas que corresponden a los paradigmas de producción y de verificación. Así, la tarea de Construir Equivalencias pertenece al paradigma de producción, y consiste en encontrar el sumando omitido en uno de los pares conmutados; mientras que las dos restantes (i.e., Encontrar y Comparar Equivalencias) pertenecen al paradigma de verificación. En ambos casos los niños tienen que pronunciarse sobre si son o no equivalentes dos pares de sumandos. Frecuentemente (véase, por ejemplo, Gelman y Meck, 1983, 1986; Miller, Keating y Perlmutter, 1984) se ha encontrado en diferentes ámbitos que el paradigma de producción resulta más complejo que el de verificación, no obstante, Bermejo y Rodríguez (1993) encontraron con respecto a tareas de conmutatividad que con el paradigma de producción se obtenían mejores resultados que con el de verificación. Ese fenómeno se debe a que la tarea de Construir Equivalencias, propia del paradigma de producción, centra la atención de los niños en los sumandos; mientras que no ocurre lo mismo en las tareas pertenecientes al paradigma de verificación.

Método

Sujetos

Participaron en esta investigación 72 sujetos distribuidos en tres grupos de 24 niños cada uno. El primero de ellos estaba formado por sujetos de EI con edades comprendidas entre 5;2 y 6;2 (*M*: 5;9 años). El segundo grupo lo integraban niños de primero de EP con edades entre 6;3 y 7;2 (*M*: 6;6 años). Finalmente, el tercer grupo estaba constituido por escolares de segundo curso de EP, con edades comprendidas entre 7;3 y 8;2 (*M*: 7;8 años). Todos los sujetos procedían de un colegio privado de clase socio-cultural media-alta y ninguno de ellos había recibido instrucción formal sobre la propiedad conmutativa.

Material

Se emplearon 12 láminas de acetato (28.8×21 cm), sobre las que se adherían etiquetas (10.2×3.8 cm) que contenían los pares de sumandos conmutados. Los números, que podían ser de color rojo o negro, tenían las siguientes dimensiones: 2.5×0.4 cm. Asimismo, se emplearon tres muñecos de 5 cm de altura con los nombres: Leo, David y Pipo para contextualizar mejor las tareas.

Procedimiento

Todos los sujetos han sido entrevistados individualmente durante las horas lectivas del centro, grabándose en vídeo todas las sesiones.

Cada niño resolvía tres tareas de conmutatividad con dos ensayos cada una:

a) *Construir equivalencias*, que consistía en presentar al niño la siguiente situación:

> «Leo tiene estas canicas: 2+5. Pipo tiene estas: 5 + —. ¿Cuántas canicas hay que darle a Pipo para que tenga las mismas canicas que Leo?».

Una vez que los niños respondían a esta cuestión, se les pedía que indicaran cómo lo habían hecho, si ambos personajes tenían la misma cantidad de canicas y que justificaran su respuesta.

b) *Encontrar equivalencias*: En esta condición se presentaban cuatro sumas y se indicaba al niño lo siguiente:

> «Yo tengo estas canicas: 5+2. Leo tiene éstas: 2+3. David tiene éstas: 5+2. Pipo tiene éstas: 2+5. ¿Hay alguno que tenga la misma cantidad de canicas que yo?».

Una vez que el niño ha emitido su respuesta, se le pregunta: «¿Hay alguno más que tenga las misma canicas que yo?». La pregunta se repite, si es necesario, hasta que el niño responda que no. Como en la tarea precedente se interrogaba a los niños sobre el procedimiento o estrategia empleada para determinar qué pares eran equivalentes.

c) *Comparar equivalencias*: En este caso se preguntaba a los niños lo siguiente:

> «Leo tiene estas canicas: 8+17 y Pipo tiene éstas: 17+8. ¿Tienen Leo y Pipo las mismas canicas?».

Una vez emitida la respuesta se interrogaba de nuevo sobre el procedimiento seguido para decidir su respuesta.

Las cantidades empleadas fueron pequeñas y grandes. En el primer caso se utilizaron pares de sumandos como los siguientes: 5+2 vs 2+5 y 6+3 vs 3+6. Y en el segundo: 7+19 vs 19+7 y 8+17 vs 17+8. En cada uno de los pares empleados uno de los sumandos era de color rojo y el otro de color negro, para poder discriminar las respuestas meramente perceptivas.

El orden de presentación de las tareas se realizó mediante un contrabalanceo parcial a partir del siguiente orden obtenido al azar: (1) encontrar (conjuntos grandes), (2) comparar (conjuntos pequeños), (3) encontrar (conjuntos pequeños), (4) construir (conjuntos grandes), (5) comparar (conjuntos grandes) y (6) construir (conjuntos pequeños). Los 24 sujetos dentro de cada grupo fueron asignados aleatoriamente de 4 en 4 a cada uno de los 6 órdenes resultantes. En cuanto al orden de presentación de los dos ensayos se obtuvo al azar y se mantuvo constante para los seis órdenes de presentación.

Para terminar, la respuesta en la tarea de *Construir equivalencias* se considera correcta si se indica el sumando omitido y se reitera la equivalencia una vez completada la operación. Asimismo, en las tareas de *Encontrar y de Comparar equivalencias* se evalúa como correcta la respuesta que afirma la equivalencia entre los pares conmutados o idénticos, siendo preciso además la justificación de la respuesta.

Análisis y discusión de resultados

Análisis de las respuestas correctas

El análisis de varianza mixto 3 (Grupo: EI vs 1° EP vs 2° EP) × 2 (Tamaño: grande vs pequeño) x 3 (Tareas: Construir Equivalencias vs Encontrar Equivalencias vs Comparar Equivalencias) con medidas repetidas en los dos últimos factores y ejecutado con el BMDP2V indica que existen diferencias significativas en los factores grupo ($F_{2,69}=7.74$, $p<.01$) y tareas ($F_{2,138}=9.6$, $p<.01$). Por tanto, aunque ninguna de las comparaciones múltiples realizadas con la prueba de Tuckey resultaron significativas, en la Tabla 1 puede observarse que la media de las respuestas correctas se incrementa a medida que lo hace la edad de los sujetos, excepto entre los dos grupos de menor edad con respecto a la tarea de Construir Equivalencias. Asimismo, en relación con las tareas tampoco se encontraron diferencias significativas en los diferentes contrastes, apreciándose, no obstante, que el rendimiento de los sujetos es más elevado en la tarea de Construir que en la de Comparar o Encontrar Equivalencias. Este dato, tal como habíamos encontrado en trabajos anteriores (Bermejo y Rodríguez, 1993, en prensa-b; Rodríguez, 1992), parece deberse al hecho de que los niños se centran fundamentalmente en los sumandos a la hora de resolver las tareas de conmutatividad.

TABLA 1. PUNTUACIONES MEDIAS Y DESVIACIONES TÍPICAS, ENTRE PARÉNTESIS, DE RESPUESTAS CORRECTAS

	Construir		*Encontrar*		*Comparar*	
	Grande	Pequeño	Grande	Pequeño	Grande	Pequeño
EI	1.71 (0.69)	1.67 (0.70)	0.96 (1)	1 (0.98)	1.25 (0.99)	1.13 (0.99)
1° EP	1.63 (0.77)	1.58 (0.83)	1.21 (0.98)	1.38 (0.92)	1.33 (0.96)	1.33 (0.96)
2° EP	2 (0)	1.96 (0.2)	1.75 (0.61)	1.88 (0.45)	1.92 (0.41)	1.96 (0.2)

Puntuación máxima=2

El análisis de varianza también revela que resulta significativa la interacción tarea x tamaño ($F_{2,138}=3.21$, $p<.05$), que ha sido analizada mediante el análisis de las comparaciones parciales. Éste indica que los dos tamaños inducen efectos semejantes en los tres tipos de tareas, dado que no se han encontrado diferencias significativas entre las tareas de Construir y Encontrar Equivalencias, ni entre las de Construir y Comparar y tampoco entre las tareas de Encontrar y Comparar Equivalencias. Esta interacción parece deberse al hecho de que el rendimiento de los sujetos en las tareas de Construir y Comparar Equivalencias en el caso de los conjuntos grandes supera al alcanzado en los conjuntos pequeños, invirtiéndose este patrón en la tarea de Encontrar Equivalencias.

En definitiva, respecto a la interpretación global de estos datos, retomamos la explicación ofrecida anteriormente en relación a las tareas, ya que consideramos que, por una parte, la semejanza de los niveles de rendimiento entre las dos tareas análogas (i.e., Encontrar y Comparar Equivalencias), que es inferior al de la tarea de Construir Equivalencias y, por otra, la falta de repercusión del factor tamaño habrían de considerarse como evidencias favorables al planteamiento de que los niños resuelven estas situaciones de conmutatividad centrándose en los sumandos (Bermejo y Rodríguez, 1993; Resnick y Neches, 1984) y, contrariamente a lo indicado por Baroody y Gannon (1984), prescindiendo de los resultados. La cuestión que resta por determinar es el grado en que esa ignorancia del resultado cuestiona la comprensión de la propiedad conmutativa mostrada por los niños. Este aspecto será tratado de manera más adecuada a la luz de los errores y las estrategias mostrados por los sujetos a lo largo de las diferentes condiciones experimentales, y más globalmente atendiendo al nivel de comprensión de la conmutatividad en que se encuentren los niños.

Análisis de los errores

Construir Equivalencias. Aunque el porcentaje de ensayos incorrectos en esta tarea es más bien reducido (15 vs 19 vs 1% para los grupos de EI, 1° y 2°

de EP, respectivamente), se aprecia un comportamiento claramente diferenciado en los grupos de EI y 1° de EP, como se hace patente en la Tabla 2. En efecto, mientras que en el primero el mayor porcentaje de errores consiste en la invención del término que debe ser encontrado y en menor medida la repetición de una de las cantidades del problema, en el grupo de 1° de EP se observa que los niños propenden a resolver la tarea correctamente a nivel numérico, pero no aceptan la equivalencia entre los pares conmutados. No obstante, comparten con los niños de menor edad el error que consiste en emitir un número al azar, aunque es menor su manifestación tanto en términos relativos como absolutos.

TABLA 2. PORCENTAJES DE ENSAYOS ERRÓNEOS EN LA TAREA CONSTRUIR EQUIVALENCIAS

	EI	1° EP	2° EP
Repiten una cantidad	33.33	—	100
Número al azar	66.67	21.05	—
Dan el término omitido, sin admitir la equivalencia porque están al revés	—	78.95	—

Encontrar Equivalencias. En esta tarea se eleva el porcentaje de ensayos erróneos para todos los grupos, llegando a corresponder al 49 vs 34 vs 9% de los ensayos en los grupos de EI, 1° y 2° de EP. En concreto, como queda recogido en la Tabla 3, en los grupos de menor edad el error más común consiste en indicar que los sumandos de los pares conmutados se encuentran invertidos, de suerte que no son equivalentes. Mientras que en estos dos grupos un elevado porcentaje de respuestas erróneas tiende a quedar comprendido en un reducido número de categorías, en el caso de los mayores se aprecia una mayor dispersión de los escasos errores cometidos, sin que sea posible hacer mención exclusivamente a un determinado tipo de error (véase Tabla 3).

TABLA 3. PORCENTAJES DE ENSAYOS ERRÓNEOS EN LA TAREA ENCONTRAR EQUIVALENCIAS

	EI	1° EP	2° EP
Están al revés	83.67	79.41	—
Señalan todos los pares	6.12	8.82	—
No suman lo mismo	—	5.88	22.22
Todos los pares comparten un sumando, son equivalentes	—	2.94	22.22
Azar	—	—	22.22
Seleccionan sólo el par idéntico al propuesto	—	—	22.22
No justifican su respuesta	10.2	2.94	11.11

Comparar Equivalencias. En esta tarea los porcentajes de ensayos erróneos se situarían entre los alcanzados para las dos tareas precedentes. Más específicamente, la cifras para los grupos de EI, 1° y 2° de EP son las siguientes: 39

vs 31 vs 3 % de los ensayos. Tal como ocurría en la tarea de Construir Equivalencias, los errores cometidos en la tarea de Comparar Equivalencias se agrupan en un reducido número de categorías (véase Tabla 4). Por otra parte, al igual que en la tarea de Encontrar Equivalencias, en los dos grupos de menor edad, y de manera más prominente en el grupo de EI, el error más común consiste en indicar que los sumandos de ambos pares conmutados están invertidos, de modo que no son equivalentes. En el grupo de 1° de EP también resulta destacable el error en que los niños rechazan la equivalencia y justifican su respuesta aludiendo al diferente color de los sumandos de los pares conmutados.

TABLA 4. PORCENTAJES DE ENSAYOS ERRÓNEOS EN LA TAREA COMPARAR EQUIVALENCIAS

	EI	1° EP	2° EP
Los sumandos están invertidos	94.87	64.52	—
Los sumandos son de distinto color	5.13	35.48	—
No suman lo mismo	—	—	100

Análisis de las estrategias

En este apartado sólo se hace referencia a las respuestas en las que se admite la equivalencia entre los pares conmutados, tanto cuando uno de ellos ha de ser completado, como cuando simplemente se juzga la equivalencia.

Construir Equivalencias. En esta tarea un elevado porcentaje de las estrategias empleadas por los niños se agrupa en torno a dos o tres categorías en cada uno de los grupos. Así, como se recoge detalladamente en la Tabla 5, los grupos de EI y 1° de EP emplean estrategias centradas en los sumandos en el 92.59 y 84.21 % de los ensayos. Más concretamente, es común que estos niños justifiquen la equivalencia apuntando que: (a) uno de los sumandos está en los dos pares y que falta una cantidad determinada para que puedan ser equivalentes (54.32 y 53.95% de los ensayos, respectivamente en los grupos de EI y 1° de EP) (p.e., «Porque aquí hay un 5 y un 5, y aquí hay un 2 y aquí falta un 2 para ser iguales» —señalando los respectivos términos en cada uno de los pares conmutados—) y (b) en una de las operaciones está un determinado número y en el par incompleto no (38.27 y 30.26 % de los ensayos en los grupos de EI y 1° de EP respectivamente) (p.e., «Porque no tiene el 2»). En el grupo de 2° de EP son también frecuentes otros tipos de argumentos además del centrado en los sumandos. Por ejemplo, en este grupo se pone de manifiesto su capacidad para hacer referencia explícita a la propiedad conmutativa (25.26 % de los ensayos).

Por otra parte, también se encuentra que la utilización del resultado es escasa en todos los grupos, aunque ligeramente superior en el de los mayores (2.47, 6.58 y 11.58 % de los ensayos para los grupos de EI, 1° y 2° de EP respectivamente). Los niños hacen referencia al resultado no para determinar si los dos pares conmutados son o no equivalentes, sino para justificar su respuesta. Además, este tipo de justificación no se encuentra necesariamente vinculada a la ejecución de la adición. Del total de 18 ensayos (2 en el grupo de los pequeños, 5 en el de 1° de EP y 11 en el grupo de 2° de EP) en los que se manifiesta este comportamiento, tan sólo cuentan en la mitad, empleando para ello la estrategia de contar a partir del mayor. Los restantes no operan y en algunos casos ofrecen justificaciones como la siguiente: «Porque 3+6 es más mayor que 6, tiene menos por eso hay que darle 3».

Para terminar, las estrategias de copia tan sólo se encuentran en esta tarea y es muy poco frecuente su aparición. Este tipo de comportamiento lo muestran los niños cuando utilizan elementos del problema irrelevantes para solucionarlo. Por ejemplo, Bermejo y Rodríguez (1993) diferencian esta estrategia mediante una condición en la que figura el resultado de uno de los pares conmutados. En el presente trabajo, la utilización de colores para romper la semejanza perceptiva parece haber sido productiva, ya que sólo parecen recurrir a él en el problema que ofrece menos alternativas de justificación. En concreto, la manifestación de esta estrategia parece deberse en cierta medida a que el color del sumando omitido se corresponde con el del primer sumando que sí está presente, siendo argumentaciones del tipo: «Viendo éste» —señalando el par completo— o «Porque está igual».

TABLA 5. PORCENTAJES DE ENSAYOS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA TAREA CONSTRUIR EQUIVALENCIAS

	EI	1° EP	2° EP
Copia (Nivel 2)	4.94	9.21	4.21
Hacen referencia a los sumandos (Nivel 4)	92.59	84.21	58.95
Hacen referencia al resultado (Nivel 4)	2.47	6.58	11.58
a+b es lo mismo que b+a (Nivel 5)	—	—	25.26

Encontrar Equivalencias. En esta tarea también es muy reducido el número de estrategias, haciéndose evidente que la más frecuente en todos los grupos consiste en indicar que los dos pares contienen los mismos números (véase Tabla 6). Sin embargo, mientras que en el grupo de los mayores la segunda estrategia en cuanto a su frecuencia de manifestación se trata de la formulación de la propiedad conmutativa, en los dos grupos de menor edad los niños tienden a señalar que los sumandos «están al revés».

TABLA 6. PORCENTAJES DE ENSAYOS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA TAREA ENCONTRAR EQUIVALENCIAS

	EI	1° EP	2° EP
Los mismos números en los dos pares (Nivel 4)	72.34	75	53.41
Los sumandos están al revés (Nivel 4)	19.15	15.63	14.77
a+b es lo mismo que b+a (Nivel 5)	8.51	9.38	31.82

Comparar Equivalencias. Como en la tarea precedente, los niños de todos los grupos advierten la equivalencia de los pares conmutados porque en ambos figuran los mismos números. En el grupo de los mayores también sobresalen las estrategias que consisten en enunciar la propiedad conmutativa y en indicar que los sumandos se encuentran al revés. En los dos grupos restantes, es mayor la dispersión de las estrategias, aunque dado que propenden a señalar que se trata de los mismos números, los restantes tipos de estrategias comprenden porcentajes muy reducidos de ensayos. En cualquier caso se sigue apreciando una marcada tendencia a centrarse en los sumandos para responder correctamente (96.56 vs 84.38 vs 59.13 % de los ensayos en los grupos de EI, 1° y 2° de EP), aunque en el grupo de los mayores comience a cobrar importancia la estrategia referente a la propiedad conmutativa.

TABLA 7. PORCENTAJES DE ENSAYOS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA TAREA COMPARAR EQUIVALENCIAS

	EI	1° EP	2° EP
Computan un par y asignan el resultado al par incompleto (Nivel 3)	—	3.13	4.30
Computan ambos pares (Nivel 3)	—	3.13	3.23
Referencia a los números más próximos de ambos pares (Nivel 4)	3.45	—	—
Los mismos números en los dos pares (Nivel 4)	89.66	71.88	43
Están al revés (Nivel 4)	3.45	12.5	16.13
a + b es lo mismo que b + a (Nivel 5)	3.45	9.38	33.33

Tal como se había encontrado en el trabajo de Bermejo y Rodríguez (1993), de este análisis cualitativo también se desprende que los niños se centran fundamentalmente en los sumandos para determinar si dos pares conmutados son o no equivalentes. Esta afirmación resulta válida con independencia de las distintas tareas, pero no así con independencia de los grupos, dado que aun cuando destaca como la estrategia más frecuente en todos los grupos, se aprecia que en el caso de los mayores comienzan a despuntar estrategias más elaboradas. Este dato, entre otros, evidencia que los errores de los niños no se deben a dificultades a la hora de operar, sino al hecho de que recurren a la disposición de los sumandos para justificar la falta de equivalencia. Como apuntan Bermejo y Rodríguez (1993) esto podría estar relacionado con la experiencia aritmética de los niños, que se enraíza en el conteo ya sea de todos los elementos (i.e., *count-all*) o tan sólo de parte de ellos (i.e., *count-on*). En efecto, teniendo en cuenta que este procedimiento implica la modificación reiterativa de un conjunto de partida por la incorporación de una nueva unidad en cada ocasión, no será lo mismo adicionar una cantidad a 6 que a 3, por ejemplo en el caso de 6 + 3 y 3 + 6. Por otra parte, también son los sumandos los elementos considerados cuando los niños ya advierten que los pares conmutados son equivalentes. La explicación más plausible de este fenómeno consiste en asumir que su concepto de la adición pasa de un concepto unario a un concepto binario, haciendo que los niños interpreten la adición como la combinación de dos conjuntos de cardinal *a* y *b* para formar un conjunto de cardinal *c*. Dicho tránsito culminará en la capacidad de enunciar explícitamente la propiedad conmutativa.

Esto nos permite enlazar con la segunda cuestión planteada en el apartado de *Análisis de las respuestas correctas*, sobre la función del resultado en relación a la comprensión de la propiedad conmutativa. A este respecto, cabe suponer que si los niños comienzan a disponer de un concepto binario de la adición no precisan conocer el resultado preciso de diversas combinaciones para determinar si son equivalentes, puesto que, en definitiva, se trata de la combinación de los mismos cardinales. No obstante, como veremos a continuación, los niños que no coordinan los dos componentes son asignados a un nivel de comprensión próximo al de conmutatividad formal.

Evidencia empírica del modelo

Los diferentes comportamientos mostrados por los niños ratifican de diverso modo los niveles propuestos por Bermejo y Rodríguez (1993) con respecto a la comprensión de la conmutatividad, que, como recogemos al comienzo de este trabajo, arrancan de un rechazo explícito de la equivalencia de los pares conmutados para terminar en una coordinación explícita del orden de los sumandos y el resultado. En efecto, los datos relativos a las estrategias y los errores confirman de modo desigual los cinco niveles:

1. *No equivalencia*. En este primer nivel los niños consideran que los distintos órdenes que pueden adoptar los pares de sumandos suponen diferentes resultados, siendo su nivel de comprensión parejo al que Baroody y Gannon (1984) atribuyen a los sujetos de su primer nivel. En concreto, nuestros sujetos rechazan la equivalencia de los pares conmutados fundamentalmente porque los sumandos están invertidos (p.e., «Porque aquí tiene un 7 y un 19 y éste un 19 y un 7»), justificación que ofrecen incluso después de haber encontrado el sumando omitido en la tarea de Construir Equivalencias. Este comportamiento se manifiesta en los niños de EI y 1° de EP (59.51 %, 74.29 % de los ensayos erróneos respectivamente).

2. *Equivalencia perceptiva*. Bermejo y Rodríguez (1993) señalan que los niños que se asignan a este nivel de comprensión parecen realizar una comparación estática elemento por elemento, desconsiderando el orden de los sumandos, al contrario de lo que ocurría en los sujetos del primer nivel. En el presente trabajo es muy reducida la manifestación de este patrón de comportamiento en los niños de todos los grupos, puesto que al igual que en el realizado por Bermejo y Rodríguez tan sólo se registra la estrategia de copia en la tarea de Construir Equivalencias (véase Tabla 5), pero el porcentaje de ensayos en los que se utiliza es muy bajo y semejante para todos los grupos (i.e., 1.65 %, 3.07 % y 1.4 % de los ensayos respectivamente para los grupos de EI, 1° y 2° de EP).

3. *Equivalencia basada en el cómputo del resultado*. Este nivel que se correspondería con el nivel de protoconmutatividad sugerido por Baroody y Gan-

non (1984) cuenta con una limitada evidencia empírica, no sólo en el trabajo de Bermejo y Rodríguez (1993), sino también en el que nos ocupa. Básicamente el comportamiento de los niños consistiría en resolver uno o los dos pares conmutados antes de juzgar si son equivalentes. Este tipo de estrategia tan sólo se manifiesta en la tarea de Comparar Equivalencias (véase Tabla 7), con un escaso nivel de representación y exclusivamente en los grupos de 1º y 2º de EP (2.09 % y 2.51 % medio de los ensayos correctos).

4. *Equivalencia práctica.* Los sujetos que han alcanzado este nivel de comprensión de la conmutatividad mantienen que los pares conmutados son equivalentes sin necesidad de operar, limitándose a señalar que los sumandos o los resultados son los mismos. Como se desprende de la información contenida en las Tablas 5, 6 y 7 las alusiones al resultado son muy escasas, produciéndose casi exclusivamente en los grupos de los mayores (0.82 %, 2.19 % y 3.86 % medio de los ensayos correctos para los grupos de EI y 1º y 2º de EP). Por el contrario las referencias a los sumandos abundan en todas las tareas y grupos (94.37 %, 88.6 % y 65.95 % medio de los ensayos correctos para los grupos de EI, 1º y 2º de EP respectivamente).

5. *Conmutatividad formal.* En este nivel análogo al nivel 3 propuesto por Baroody y Gannon (1984), los sujetos justifican sus respuestas estableciendo la propiedad conmutativa. De manera que hacen referencia simultánea y coordinadamente a los sumandos y el resultado, al indicar que la suma de a+b es la misma que la de b+a. Este tipo de justificación se encuentra en todos los grupos, aunque sólo en el caso de los mayores se mantiene constante a lo largo de las diversas tareas y con unos índices notables en relación a las demás estrategias empleadas, mientras que entre los sujetos de menor edad es muy limitada su manifestación y tan sólo en las tareas de Encontrar y Comparar Equivalencias (3.99 %, 6.25 % y 30.14 % medio para los grupos de EI, 1º y 2º de EP).

Conclusiones

En primer lugar, los datos confirman de diverso modo los cinco niveles del modelo propuesto por Bermejo y Rodríguez (1993) sobre la comprensión de la propiedad conmutativa. A este respecto, el dato más sorprendente se refiere al hecho de que el porcentaje medio de ensayos en el nivel 3 (equivalencia perceptiva) resulta notablemente inferior y, asimismo, aumenta de manera considerable el correspondiente al nivel 4 (equivalencia práctica). La explicación de estos resultados tan dispares podría atribuirse a que en el trabajo de Bermejo y Rodríguez (1993) se añade un factor que aquí no ha sido tenido en cuenta, esto es, el factor resultado que implica la presencia del signo de igualdad y el resultado en uno de los pares conmutados. Más concretamente, en dicho estudio los niños rechazaban la equivalencia cuando en uno de los algoritmos no se hallaba presente el signo de igualdad y el resultado, pero estos mismos niños la aceptaban cuando aparecían exactamente los mismos términos en los pares conmutados. De este modo, el primer comportamiento fue clasificado en el nivel de no equivalencia (nivel 1), mientras que el segundo lo fue en el nivel de equivalencia perceptiva (nivel 2). Sin embargo, en el presente trabajo, y dadas las condiciones experimentales del mismo, no resulta sencillo determinar si un niño que acepta la equivalencia aludiendo a los sumandos se encuentra realmente en el nivel de equivalencia práctica (nivel 4) o en los niveles 1 o 2. En otras palabras, en este estudio los pares conmutados son exactamente iguales, salvo por el hecho, como su propio nombre indica, de que los sumandos están invertidos, siendo posible que los niños acepten la equivalencia porque en ambos contienen los mismos números y en ambos está el signo de suma. Más específicamente, pudiera ser que los porcentajes correspondientes al nivel 4 estuvieran inflados, correspondiendo parte de los mismos a los niveles 1 o 2. Por tanto, y de cara a futuros trabajos, resulta determinante diseñar tareas que nos permitan diferenciar claramente estos niveles.

En segundo lugar, con independencia de que sea más abultada la información relativa a unos niveles que a otros, estas etapas además de encontrarse conceptualmente ordenadas, podrían ser las seguidas por los niños en la adquisición informal de la propiedad conmutativa. Por tanto, los niños pasarían por los siguientes momentos: (1) no equivalencia, (2) equivalencia perceptiva, (3) equivalencia basada en el cómputo del resultado de uno de los dos pares conmutados, (4) equivalencia práctica y (5) conmutatividad formal. Es decir, aunque estos niveles, como señalamos unas líneas más arriba, están ordenados conceptualmente, no significa que todos los niños sigan necesariamente la misma ruta evolutiva. Al contrario y como ya se ha propuesto en otros trabajos (Bermejo y Rodríguez, 1992; Fuson, 1988) parece más posible la existencia de múltiples rutas a la hora de pasar de unos niveles a otros.

En cuanto al efecto de los tamaños de los conjuntos, nuestros datos sólo nos permiten discutirlos parcialmente a la luz de los encontrados por otros autores (Baroody, 1982; Ginsburg, 1982). Por un lado, encontramos que este factor no incide sobre los niveles de ejecución de los niños, resultando coherente con el hecho de que sus estrategias se basan principalmente en los sumandos, siendo muy reducido el porcentaje de ensayos en los que operan. Por otro, parecen estar más próximos a los encontrados por Baroody (1982), en el sentido de que los niños más pequeños no encuentran mayores dificultades para resolver las diversas tareas de conmutatividad cuando se trata de conjuntos grandes. En relación con lo que indicamos en el primer punto, los problemas de los niños no estriban en cuestiones de ejecución, sino que son de índole conceptual. La proximidad que proponemos con respecto a los resultados de Baroody (1982) no va más allá de la vertiente empírica, ya que en la vertiente teórica, tal como se recoge en el apartado de introducción, la explicación ofrecida por este autor sería sustancialmente diferente.

Por lo que se refiere a la tercera cuestión planteada al comienzo de este trabajo, se encuentra que las tareas de verificación (i.e., Encontrar y Comparar Equivalencias) obtienen puntuaciones inferiores a la tarea de producción (i.e., Construir Equivalencias). Este resultado aunque contrario a los datos encontrados por otros autores (p. ej., Gelman y Meck, 1983, 1986; Miller *et al.*, 1984), concuerda con los datos de Bermejo y Rodríguez (1993). En efecto, la tarea de Construir

Equivalencias se revela como la más sencilla porque centra la atención de los niños en los sumandos. Esta explicación se encuentra avalada por el hecho de que este fenómeno se registra fundamentalmente en los dos grupos de menor edad, y se ajusta a los pasos propuestos en el modelo de adquisición de la propiedad conmutativa.

REFERENCIAS

Baroody, A.J. (1982). Are discovering commutativity and more economical strategies related? *Problem Solving, 4*, 1-2.

Baroody, A.J. (1984). More precisely defining and measuring the order-irrelevance principle. *Journal of Experimental Child Psychology, 38*, 33-41.

Baroody, A.J. & Gannon, K.E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction, 1*, 321-339.

Baroody, A.J. & Ginsburg, H.P. (1986). The relationships between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: LEA.

Baroody, A.J., Ginsburg, H.P. & Waxman, B. (1983). Children's use of mathematical structure. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 156-168.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a). La operación de sumar. En V. Bermejo, *El niño y la aritmética* (pp. 107-150). Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas, 8*, 23-41.

Bermejo, V. & Rodríguez, P. (1993). Children's understanding of the commutative law of addition. *Learning and Instruction, 3*, 55-72.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (en prensa-a). Conceptualización de la operación aditiva y estrategias de solución. *Investigaciones Psicológicas.*

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (en prensa-b). La propiedad conmutativa de la suma: procesos de adquisición y desarrollo. En J. Beltrán y otros, *Intervención psicopedagógica. I: Aprendizajes y contenidos del curriculum*. Madrid: Universidad Complutense.

Briars, D.J. & Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Carpenter, T.P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceputal and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: LEA.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Gelman, R. & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition, 13*, 343-359.

Gelman, R. & Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 29-57). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ginsburg, H. (1982). *Children's arithmetic*. Austin: Litton Educational Publishing.

Miller, K., Keating, D. & Perlmutter, M. (1984). Cognitive arithmetic: Comparison of operations. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 10*, 46-60.

Resnick, L. B. & Neches, R. (1984). Factors affecting individual differences in learning ability. In R.J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (pp. 275-323). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Rodríguez, P. (1992). *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición de la propiedad conmutativa*. Madrid: Universidad Complutense.

Weaver, J.F. (1982). Interpretations of number operations and symbolic representations of addition and subtraction. In T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 60-66). Hillsdale, NJ: LEA.