Anuario de Psicología
1992, nº 55, 53-61

Conjuntos borrosos: perspectivas sugerentes

Alfonso Sarrià
Universidad Autónoma de Barcelona

El artículo presenta una introducción a la teoría de conjuntos borrosos y varias aplicaciones posibles en el marco de la psicología. Pone de manifiesto la necesidad de introducir relaciones borrosas en los análisis de preferencias de los individuos. A su vez, contrapone la teoría de la posibilidad versus la de probabilidad y detalla dos experiencias concretas en el ámbito de la teoría de la decisión. Cita, por último, las técnicas del Cluster *borroso y la Regresión borrosa.*
Palabras clave: *Conjuntos borrosos; función de pertenencia; α-cortes; relaciones borrosas; posibilidad; decisión.*

The paper presents an introduction to the theory of fuzzy sets and several —not all— feasible applications in the field of Psychology. At first, the need of fuzzy relations for preferences analysis is pointed out. The possibility theory versus probability is suggested and two examples of decision-making are expounded. Finally, the techniques of Fuzzy Cluster and Fuzzy Regression are worthy of remark.
Key words: *Fuzzy Sets; Membership Function; α-Cut; Fuzzy Relations; Possibility; Decision-Making.*

«Fiat umbra! Brotó el pensar humano».
(Abel Martin, 1840-1898).

La inteligencia humana trata y razona sobre conceptos vagos. Se toman incluso decisiones importantes sobre la base de una información imprecisa. La fuente de imprecisión es precisamente la carencia de criterios nítidos de pertenencia a una determinada clase. Para abordar estos problemas de imprecisión se

Dirección del autor: Alfonso Sarrià. Laboratorio de Estadística Aplicada y de Modelización, Universidad Autónoma de Barcelona. Apartado de Correos 40. 08193 Bellaterra. Barcelona.

está en la búsqueda de «*modelos matemáticos de la vaguedad*» (Trillas, 1980), mucho más flexibles que los de la matemática tradicional y basados en una lógica distinta de la lógica clásica o booleana. A esta nueva concepción obedece la *Teoría de subconjuntos borrosos* de L.A. Zadeh (1965).

A partir de 1965 la publicación de artículos sobre conjuntos borrosos, tanto a nivel teórico como aplicado, ha sido de una progresión abrumadora. Como simple dato referencial digamos que si en 1965 se publicaron dos artículos sobre borrosos (M. Gupta, 1977, p. 431), la proliferación de artículos ha sido tanta que en 1979 el promedio de publicación fue un artículo/día (Trillas, 1981, p. 7), en donde se usaba o realizaba alguna contribución a la teoría de Zadeh, y en 1991 las cotas sobrepasan, con creces, las previsiones más optimistas. Basta cotejar, por ejemplo, algunas de las revistas especializadas como *Fuzzy Sets and Systems* o *Approximate Reasoning*, entre otras.

El objetivo del presente artículo es simple, tanto por su carácter divulgativo como por las limitaciones del espacio disponible. Intenta *sugerir perspectivas* de aplicación de los conjuntos borrosos en el marco de las ciencias humanas y de la psicología, en particular. Con este fin, y a sabiendas de que toda selección puede comportar omisiones lamentables, se presentan los siguientes apartados:

1. Modelización de la vaguedad.
2. Clasificar y ordenar en ambientes borrosos.
3. Probabilidad versus posibilidad.
4. Sobre la decisión: criterios múltiples y espacio de consenso.
5. *Cluster* borroso.

Modelización de la vaguedad

El concepto de *subconjunto borroso* está vinculado al de *función característica generalizada*. Dado un $X \neq \phi$, universo del discurso, llamamos función característica generalizada a toda aplicación:

$$\Phi : X \rightarrow [0,1]$$

es decir, a cada $x \in X$ le asociamos un grado de pertenencia $\alpha \in [0,1]$, equivalente al grado con que x verifica determinada proposición p definida en el universo. Cada función característica generalizada determina una clasificación entre los elementos de X, a la que denominamos *subconjunto borroso* de X. Podemos expresar un subconjunto borroso de X como un conjunto de pares:

$$\{ (x,\alpha);\ x \in X,\ \alpha \in [0,1] \}$$

En forma análoga al caso clásico representamos al conjunto de todos los subconjuntos borrosos por $P(X)$ y al conjunto de todas las funciones características generalizadas por $[0,1]^X$. Identificamos $P(X) = [0,1]^X$ Obviamente la expresión anterior engloba a los subconjuntos clásicos o nítidos de X.

En *P(X)* se definen las siguientes operaciones:

$$A \cup B \Longleftrightarrow \Phi_{A \cup B}(x) = \text{máx}\,\{\Phi_A(x), \Phi_B(x)\}$$
$$A \cap B \Longleftrightarrow \Phi_{A \cap B}(x) = \text{mín}\,\{\Phi_A(x), \Phi_B(x)\}$$
$$\bar{A} \Longleftrightarrow \Phi_{\bar{A}}(x) = 1 - \Phi_A(x)$$
$$A \subset B \Longleftrightarrow \Phi_A(x) \leq \Phi_B(x)$$
$$A = B \Longleftrightarrow \Phi_A = \Phi_B(x)$$

(Por simplicidad, puede representarse $\Phi_A(x)$ por A(x)).

Advirtamos que en *P(X)* ocurre que:

$$A \cup \bar{A} \neq X$$
$$A \cap \bar{A} \neq \phi,$$

salvo si A es conjunto nítido o clásico: $A(x) \in \{0,1\}$.

No se trata, por tanto, de un verdadero complemento. Por un cierto abuso del lenguaje seguimos diciendo *complementario* de A, cuando en realidad se trata de un *cuasicomplemento*, excepto en el caso indicado. Por ello, la estructura de *P(X)*, con las operaciones y relaciones indicadas, es un *Álgebra de De Morgan*, por ser un retículo distributivo, provisto de una negación que es un cuasicomplemento que verifica la idempotencia y las leyes de De Morgan. El estudio analítico y formal de la *negación* fue realizado por Trillas (1979).

El concepto de *niveles de nitidez* (en la literatura denominados habitualmente por α-cortes) es uno de los más importantes de la teoría, por cuanto permite relacionar subconjuntos borrosos con conjuntos nítidos u ordinarios. Sea $A \in$ *P(X)*. Para cada $\lambda \in (0,1]$, definimos el *subconjunto nítido de nivel* λ como el subconjunto ordinario A_λ formado por:

$$A_\lambda = \{x \in X;\ \lambda \leq A(x)\}$$

De la misma definición se deriva que los niveles de nitidez forman una sucesión decreciente de intervalos encajados. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, entonces $A_3 \subset A_2 \subset A_1$.

Quedan, pues, delineados unos mínimos teóricos de la teoría. Para una mayor familiaridad con los contenidos, mediante la exposición de ejemplos clarificativos, puede recurrirse a Trillas (1980) y Sarriá (1984).

Clasificar y ordenar en ambientes borrosos

La clasificación y la ordenación son objetivos primarios de cualquier ciencia. El estudio de las *relaciones binarias* constituye la base y el fundamento para una y otra. La lógica subyacente es, generalmente, la lógica booleana. Se definen las posibles propiedades de las relaciones (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, irreflexiva...), así como las relaciones de equivalencia, los pre-órdenes, órdenes parciales y totales. Las relaciones binarias no sólo juegan un importante papel en la matemática pura, sino en aplicaciones de ciencias como la psicología, la sociología, la lingüística, el arte, etc. Importantes modelos de la toma de decisiones y teorías de la medición se fundamentan en la noción de relación binaria (Ovchinnikov, 1991).

En concreto, en el marco de la psicometría, uno de los primeros estudios se centra en el análisis de las *preferencias* de los sujetos ante un conjunto finito de alternativas. En la comparación «por pares», sea cual sea la relación *R* establecida, se usan únicamente los valores 0 (NO) y 1 (SÍ), obteniéndose matrices cuadradas de 0 y 1, a partir de las cuales se establecen los órdenes pertinentes (pre-orden, orden débil, débil estricto, orden parcial, parcial estricto, orden total, total estricto) o se detectan, por el contrario, las inconsistencias del sujeto.

¿La valoración de las preferencias por 0 y 1 refleja siempre los verdaderos sentimientos de los sujetos? Obviamente, no. No siempre la preferencia es tan nítida y diáfana como para asignar un 1, indicativo de plena y total preferencia. Caben, sin duda, *grados de preferencia*. De ahí que el instrumento que proporcionan las *relaciones binarias borrosas* permite realizar análisis de preferencias más ajustados a la realidad. La tarea, en potencia y no por modesta menos eficiente, abre todo un abanico de posibilidades.

Los términos habituales de las relaciones clásicas tienen su traducción análoga, con matices diferentes, en el conjunto de las relaciones borrosas. Así, por ejemplo, la *transitividad* de una relación está asociada al tipo de composición elegido. Según sea la composición (máx-mín; máx-producto; mín-máx), será la transitividad. Las relaciones borrosas reciben nombres específicos según las propiedades de que gocen. Las relaciones reflexivas y transitivas se llaman *pre-órdenes*; las reflexivas y simétricas, *semejanzas o proximidades*; las reflexivas, simétricas y transitivas, *similitudes o equivalencias borrosas*. Advirtamos, en particular, que la intersección de las clases de similitud o equivalencia puede no ser nula, en contra de lo que ocurre en el caso nítido, donde las clases de equivalencia coinciden o son disjuntas. Además, las similitudes o equivalencias borrosas coinciden con las jerarquías indexadas, tan en uso en el análisis de conglomerados. Es, en este entorno de órdenes borrosos, donde debiera incidir la psicometría en su análisis de las preferencias.

El concepto de relación binaria borrosa fue introducido por Zadeh (1965) y ampliamente desarrollado en 1971. Orlovsky (1978) inició el estudio de las relaciones de preferencia borrosas en el ámbito del *problema general de la decisión*. Como simple referencia notemos que el trabajo de Orlovsky indica cómo, a partir de un subconjunto borroso de «acciones no dominadas», se extrae un conjunto de alternativas maximales no dominadas, X^{ND}, que constituyen la solución del problema de decisión. Del conjunto X^{ND} se puede obtener el conjunto clásico de alternativas no dominadas y no borrosas, X^{NND}. El concepto de *dominancia* ha sido ampliamente estudiado por sucesivos autores (Takeda y Nishida, 1980; Dubois y Prade, 1980, 1981).

La elección de la «mejor alternativa» o la ordenación de las alternativas están implicadas en el problema de ordenación de los subconjuntos borrosos. Una revisión de los principales métodos, contrastados con ejemplos, puede encontrarse en Bortolan y Degani (1985). No pueden tampoco omitirse las referencias a Ovchinnikov (1981, 1989, 1991), Ovchinnikov y Riera (1982), donde se analizan la estructura de las relaciones, las clasificaciones borrosas, las particiones borrosas, como puntos clave.

Por todo ello sugeriríamos un segundo cauce de aplicaciones. Experiencias de decisión sobre alternativas borrosamente preferidas, detectando las posibles *dominancias*.

Probabilidad versus posibilidad

Estamos tan familiarizados con el uso de «probabilidades» que han adquirido carta de primacía en cualquier investigación. Cierto es que hasta mediados los años sesenta el único instrumental disponible, ante situaciones que comportaban incertidumbre, era la probabilidad. Pero el carácter esencialmente *aditivo* de la misma no favorecía la modelización de muchas de las situaciones en que está implicado el razonamiento humano. De ahí que surgieran nuevas medidas, caracterizadas todas ellas por un denominador común, su flexibilidad, su aspecto menos restrictivo. Se sustituye, en definitiva, la *aditividad* por la *monotonía*.

Como recuerda Kampé de Feriet (1982), las palabras *probable* y *probabilidad* tuvieron hasta mediado el siglo XVII un significado puramente epistemológico, acorde con su etimología (del latín *probare*, es decir, justificar, demostrar la veracidad de una proposición). A partir de 1654 con los trabajos de Pascal y Fermat surge una nueva interpretación, tipo frecuencial. La probabilidad es una estimación de la frecuencia de un resultado en una experiencia aleatoria.

No se trata de una simple cuestión terminológica. Las propiedades matemáticas, en uno u otro caso, no son las mismas. En la interpretación frecuencial o estadística, en *álgebra de sucesos*, $P(A)+P(\bar{A})=1$, siendo $\bar{A}$ el suceso contrario de A. En la interpretación epistemológica, en *álgebra de proposiciones*, no puede mantenerse la misma relación anterior, $P(p)+P(\neg p)=1$, siendo $\neg p$ la proposición contraria a p. Según sea el estado actual de conocimientos, puede muy bien darse que el *grado de certeza* atribuido a una proposición sea 0.3 y el de su contraria 0.4. Debería, pues, establecerse la desigualdad:

$$P(p) + P(\neg p) \leq 1$$

Esta propiedad, explícitamente formulada por J. Bernouilli en su *Ars Conjectandi* (1713), cayó en el olvido. Los trabajos, relativamente próximos, de Dempster (1968), Shafer (1976), han dado pie al desarrollo de medidas en que, en un sentido u otro, se cumple la desigualdad anterior. La *Teoría de la Evidencia* (Shafer, 1976) y la *Teoría de la Posibilidad* (Zadeh, 1978) son índices representativos. Ambas, a su vez, pueden sumergirse dentro de la *Teoría de Medidas borrosas* (Sugeno, 1974), generalización de las medidas aditivas clásicas.

Fuera de tono sería pretender detallar las particularidades de cada una. Notemos que dentro de las medidas borrosas son importantes las familias basadas en *t-normas* y *t-conormas* (duales de las anteriores). (Una visión global de estos conceptos puede hallarse en Alsina, 1983.)

Las medidas borrosas basadas en la conorma máx(x,y) son las medidas de *posibilidad*.

$$\forall A,B \in P(X)\text{: } \Pi\,(A \cup B) = \text{máx}\,[\,\Pi\,(A), \Pi\,(B)]$$

La expresión anterior nos da, conocidas las valoraciones de A y B, la evaluación más prudente sobre el grado de confianza de la ocurrencia del suceso $A \cup B$. Es coherente con la interpretación de los juicios de posibilidad que comprometen poco a quien los emite. Y es coherente, también, con la idea física de posibilidad: para realizar $A \cup B$, basta realizar el más fácil de los dos. Dada una medida de posibilidad Π, se define la *distribución de posibilidad*.

Las medidas duales de la posibilidad son las medidas de *necesidad*. Se fundamentan en la t-norma dual mín (x,y). En la exposición teórica llega a establecerse la siguiente relación entre las medidas de posibilidad y necesidad:

$$N\,(A) \leq \Pi\,(A)$$

Relación que coincide con la psicología normal de las personas que ven antes la posibilidad de una situación que su necesidad. La primera enfatiza el talante optimista; la segunda, el pesimista.

Las sugerencias, tras las mínimas puntualizaciones anteriores, discurren, focalizando el punto de mira en la psicología, a dos niveles. El primero comportaría un estudio teórico exhaustivo de las medidas borrosas, las de posibilidad, en particular, y la aplicación a situaciones reales no complejas en demasía. El segundo, reiterar ejemplos análogos a los presentados por Dubois-Prade (1985) como «manipulación de informaciones incompletas o inciertas y tratamiento de cuestiones difusas en una base de datos».

Sobre la decisión: criterios múltiples y espacio de consenso

De entre los mil y uno aspectos que pueden considerarse en la toma de decisiones, sugerimos, como estímulo operativo, dos aplicaciones, una potenciada por Freire y Ollero (1981) como generalización de la teoría del *simplicial complex* (complejo de símplices); otra, en la línea de Bezdek y Spillman (1977-1978-1979) sobre *medidas escalares de consenso.*

La primera puede alcanzar los siguientes objetivos:

1. Detectar las conexiones dentro de un grupo de trabajo que cumpla ciertas características de cohesión.
2. Obtener la formación de un grupo de trabajo que sea compacto.
3. Seleccionar personal conforme determinados perfiles.
4. Diseñar los perfiles requeridos para la promoción del personal de la empresa.
5. Determinar si un candidato debe ser o no admitido en un grupo de trabajo.

En esquema se sigue el proceso siguiente. El conjunto de *alternativas* está formado, pongamos por caso, por las personas candidatas: P_1, P_2, P_3,... Los *criterios* son las características exigidas para el trabajo: C_1, C_2, C_3, C_4,... La evaluación final de los candidatos queda reflejada en una relación borrosa R.

Se estudia R a través de los niveles de nitidez R_α. Mediante la aplicación de los conceptos básicos de la teoría de símplices —*simplex de dimensión p, cara, q-conexión, clase de equivalencia para cada nivel* α— se obtiene una arborescencia que permite los análisis sobre la cohesión y elección de los candidatos.

La segunda se enmarca en los pequeños grupos de decisión. La finalidad principal de los pequeños grupos de decisión es llegar, tras las pertinentes discusiones, a un *consenso.* Pero el *consenso*, entendido como acuerdo unánime de los sujetos, no es un concepto nítido. Raramente los grupos alcanzan un consenso total. Entre los diversos enfoques del tema, los denominados clásicos olvidan factores importantes: por un lado, los sujetos pueden tener opiniones sobre todas las alternativas con distintos grados de preferencia y, por otro, la discusión provoca interacción. En consecuencia, la evolución de una decisión, vía comunicación intra-grupos, es un proceso continuo. Por tanto, bajo esta perspectiva, será necesario incorporar al modelo variables dinámicas y medibles.

Representantes de esta línea —dinamismo, borrosidad— son los trabajos de Bezdek y Spillman (1978-1979). Las ideas fundamentales son las siguientes. Se analizan, en primer lugar, las relaciones borrosas *recíprocas* y los *tipos* de preferencia o consenso (tipo 1 y tipo 2), para, seguidamente, calcular las medidas escalares tanto de preferencia como de consenso, *F(R) media de la borrosidad de R* y *C(R) media de la certeza de R*. Todo ello permite considerar las *distancias* que median a un determinado tipo de consenso y analizar la dinámica de los consensos o desavenencias en distintos periodos de tiempo.

El ejemplo soporte presentado por los autores consideraba cuatro grupos de estudiantes universitarios: G1 formado por tres estudiantes, G2 por cuatro, y los G3 y G4 por cinco estudiantes cada uno de ellos. Cada grupo confeccionó una lista de diez temas sugestivos (alternativas), de los que debían seleccionar uno para debatir en la clase respectiva. Reunidos los grupos, y previamente a cualquier discusión, los miembros elaboraron su particular matriz recíproca borrosa de preferencia sobre las alternativas. Se promediaron las valoraciones correspondientes a cada uno de los pares (i,j) de alternativas, obteniéndose una matriz inicial R representativa del sentir del grupo.

Se reiteró el proceso en determinados periodos de tiempo $t=(0,1,2,3,4)$, mediando entre cada uno de ellos las consiguientes discusiones intra-grupos. En cada uno de los tiempos t fijados se hallaron las respectivas distancias de los grupos al consenso TIPO 1 (elección clara y nítida de una alternativa, indiferentes todas las demás). La representación gráfica (ejes: tiempos y distancias) muestra la evolución dinámica de los grupos y permite análisis comparativos.

Cluster y Regresión borrosa

Citamos, por último, dos técnicas estadísticas, la del *Cluster borroso* (Roubens, 1978; Bezdek, 1981, 1982, *et al.*), del que en esta misma monografía puede encontrarse una aplicación, y la *Regresión borrosa* con amplia repercusión en la literatura especializada (*Fuzzy Sets and Systems*, 1991-1992).

La complejidad inherente a una y otra exige, sin duda, un marco expositivo menos restringido. No obstante, la simple referencia puede ser un toque de atención —estímulo alentador— para quienes se desenvuelven en las áreas del análisis multivariante.

Conclusión

Hemos presentado sin mayores pretensiones, a modo de zigzag, algunas de las posibles aplicaciones de los *conjuntos borrosos* en psicología. Desde la incorporación de las *relaciones borrosas* en los análisis de preferencias, a las técnicas más sofisticadas del *Cluster* y la *Regresión*, mediando por las *medidas de posibilidad* y por el apunte de experiencias basadas en el *simplicial complex* y en las *medidas escalares de consenso.* No se ha hecho referencia alguna, por ajuste a la concisión, a las denominadas *variables lingüísticas* que juegan también papel importante en la teoría.

Cualquier sugerencia, nítida o borrosa, del posible lector será recibida con gratitud por quien suscribe el artículo.

Referencias

Alsina, C. (1983). A primer t-norms. *Actas del II Congrès Català de Lògica Matemàtica.*

Bezdek, J.C., Spillman, B. *et al.* (1979). Fuzzy relation space for group decision theory: An application. *Fuzzy Sets and Systems, 2*, 5-14.

Bezdek, J.C. (1992) (Ed.). *Fuzzy Models for Pattern recognition.* IEEE.

Dubois, D. & Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* New York: Academic Press.

Dubois, D. & Prade, H. (1982). *Theorie des Possibilités.* Paris: Masson.

Freire, E. & Ollero, A. (1982). A method of multicriteria analysis. In M.M. Gupta & E. Sánchez (Eds.), *Fuzzy Information and Decision Processes* (pp. 167-181). Amsterdam: Norht-Holland.

Orlovsky, S.A. (1978). Decision making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems, 1*, 155-167.

Ovchinnikov, S.V. (1981). Structure of fuzzy binary relations. *Fuzzy Sets and Systems, 6*, 169-195.

Ovchinnikov, S.V. (1991). Similarity relations, fuzzy partitions and fuzzy orderings. *Fuzzy Sets and Systems, 1*, 107-126.

Sarriá, A. (1984). *Conjuntos borrosos: antecedentes, estructura y aplicaciones en Psicología*. U. Autónoma de Barcelona.
Trillas, E. (1979). Sobre funciones de negación en la teoría de los conjuntos difusos. *Stochastica, 3*, 47-60.
Trillas, E. (1980). *Conjuntos borrosos*. Barcelona Vicens-Vives.
Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control, 8*, 388-353.
Zadeh, L.A. (1971). Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences, 3*, 177-200.
Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems, 1*, 3-28.
Zimmermann, H.J. (1988). *Fuzzy Set theory and its applications*. Kluwer-Nijhoff.