ANUARIO DE PSICOLOGÍA
Núm. 43 - 1989 (4)

DISEÑOS MULTIVARIABLES EN EVALUACIÓN CONDUCTUAL

JAUME ARNAU I GRAS
Departamento de Metodología
de las Ciencias del Comportamiento
Universidad de Barcelona

Jaume Arnau i Gras
Departamento de Metodología de las Ciencias del Comportamiento
Facultad de Psicología
Adolf Florensa, s/n.
08028 Barcelona

1. Consideraciones generales

El estudio y tratamiento del Diseño experimental tiene su punto de arranque histórico en los trabajos iniciados por Fisher en Rothamsted en 1919. A partir de este momento y a lo largo de los 10 años siguientes, Fisher junto con sus colaboradores (especialmente Yates) desarrolla la técnica del Análisis de la Varianza que, como sabemos, constituye un instrumento estadístico decisivo en investigación experimental (Fisher, 1925). Todo este esfuerzo conceptual cristaliza en la publicación titulada *Design of experiments* (Fisher, 1935) que, sin duda alguna, debe ser considerada clásica y, en donde se enfatiza el valor de los Diseños factoriales como alternativa a la investigación tradicional de variación de un factor a un tiempo (McCullagh y Nelder, 1983).

Cabe destacar, no obstante, que las técnicas analíticas desarrolladas por Fisher se aplican, fundamentalmente, a investigaciones de una sola variable de respuesta (o variable dependiente), por cuya razón podemos afirmar que los análisis basados en la comparación de varianzas son propios de los experimentos univariables.

Entendemos, en consecuencia, por univariable aquella situación en donde sólo se dispone de una medida o registro de la conducta de los individuos. Por tanto, situaciones experimentales de una sola variable dependiente (o variable de respuesta). El Diseño univariable abarca a todos aquellos modelos o formatos que podemos considerar clásicos (o fisherianos), tanto en su versión unifactorial como factorial.

Ahora bien, el matemático-estadístico Wilks (1932) destacó que los principios del Análisis de la Varianza podían ser, fácilmente, generalizables a situaciones multivariables. Es decir, a situaciones donde se tiene más de un registro de conducta o variable dependiente. Sin embargo, los primeros intentos de llevar a cabo dicha generalización se deben a Bartlett (1947) y Tukey (1949).

Como afirma Bock (1975), la generalización de los principios del AVAR al caso multivariable consiste, simplemente, en reemplazar la descomposición de la Suma de Cuadrados de las observaciones (SC) por la descomposición de la matriz Suma de Cuadrados y Productos Cruzados de los datos, tomados de múltiples variables de respuesta (SCPC). La analogía se mantiene, entre ambos análisis, de forma exacta.

Es fácil constatar, de otra parte, que durante estos últimos años se ha suscitado un gran interés hacia los Diseños experimentales multivariables, no sólo por las ventajas que reportan estas nuevas técnicas de análisis sino, sobre todo, porque permiten llevar a cabo investigaciones mucho más complejas y más ajustadas a la realidad de los hechos. Especialmente si se tiene en cuenta el campo de trabajo propio de las ciencias del comportamiento.

Por último, mediante el Análisis Multivariable de la Varianza (AMVAR), basado en el modelo de la Regresión Multivariable, se pueden someter a prueba «hipótesis globales» relativas a la totalidad de las variables dependientes, dado que en su estructura se incorporan las posibles relaciones existentes entre estas variables.

2. Propuesta de clasificación de los Diseños multivariables

Antes de plantearnos la descripción del modelo de Análisis Multivariable de la Varianza, dentro del contexto de la investigación experimental, discutiremos, como punto previo, la posible categorización de los Diseños multivariables a fin de poder contar con un marco de referencia adecuado que nos permita ubicar cualquier esquema experimental.

Desde una perspectiva amplia son dos las situaciones que deben ser claramente diferenciadas y que constituyen el criterio básico para una primera categorización del Diseño multivariable. En efecto, cuando nos referimos a los experimentos multivariables cabe distinguir entre:

a) Aquellas situaciones experimentales donde se toman registros o medidas de dos o más variables de respuesta (variables dependientes). Caracterizaremos a esta clase de situaciones como *Diseños experimentales de múltiples variables dependientes.* Dentro de esta categoría se incluyen tanto los Diseños simples como los factoriales, junto con su amplia variedad de extensiones.

b) Y, de otra parte, las investigaciones experimentales donde una misma variable dependiente es registrada una serie repetida de veces, ya sea bajo ocasiones de observación diferentes, ya sea bajo la acción de tratamientos distintos. De acuerdo, pues, a esta segunda situación deben ser considerados todos aquellos esquemas experimentales que tradicionalmente han sido caracterizados como *Diseños de medidas repetidas* (o *Diseños intra-sujeto*).

Al mismo tiempo, debe quedar suficientemente claro que cuando las «medidas repetidas» son tomadas en función del parámetro tiempo, el experimento suele denominarse *Diseño longitudinal.* Es decir, en el Diseño longitudinal es precisamente la secuencialidad de los registros y no la sucesiva aplicación de los tratamientos uno de sus atributos característicos.

De lo dicho hasta aquí podemos adelantar una primera aproximación en la categorización de los Diseños multivariables.

Diseños multivariables	Diseños de múltiples variables dependientes.
	Diseños de medidas repetidas.

2.1. Diseños de medidas repetidas

Puesto que en la actualidad los Diseños de medidas repetidas van adquiriendo una destacada importancia (Bock, 1975; Fleiss, 1986; Stevens, 1986), vamos a describirlos con un poco más de detalle.

En el supuesto de que se posea una sola muestra de población de la que se toma, de cada uno de los sujetos, una serie sucesiva de registros u observaciones ya sea en función de un conjunto de puntos o cortes en el tiempo, ya sea en función de un conjunto de tratamientos, se tiene en este caso un *Diseño simple de medidas repetidas.* Es decir, un Diseño donde la variable «sujetos» se combina con los distintos valores de la «variable de tratamiento» o «variable ocasiones de observación». Se trata, pues, de un Diseño simple cruzado conocido, también, como Diseño de Sujetos x Tratamientos (u Ocasiones). Lee (1975), se refiere a esta estructura experimental con el nombre de Diseños de medidas totalmente repetidas y, la simboliza por «S x A», donde «S» denota la variable sujetos y «A», la variable de tratamientos u ocasiones.

Supóngase, de otra parte, que se toman dos o más muestras de población de acuerdo con algún criterio o variable de clasificación. Debe entenderse, de acuerdo con esto, que las muestras o grupos de sujetos se hallan «anidados» (incluidos) dentro de los diferentes valores de la variable de clasificación o, variable «B». Al mismo tiempo, los niveles de «B» se cruzan con los distintos valores de «A». Este nuevo formato de Diseño, de «k» muestras de sujetos, ha sido denominado por Winer (1971) Diseño factorial mixto y, por Lee (1975) Diseño de medidas parcialmente repetidas. No obstante, considero que una más adecuada caracterización de esta estructura es la de Diseño *split-plot* (Kirk, 1968, 1982).

Ha de tenerse en cuenta que si en lugar de una variable de clasificación, el investigador utiliza una segunda variable de tratamiento a la que asigna, al azar, las «k» muestras de sujetos, el Diseño puede ser adecuadamente conceptualizado como un Diseño factorial mixto. Todas estas variedades de experimentos pueden representarse mediante la notación «S(B) x A», donde la variable de «sujetos» se halla anidada dentro de las categorías o valores de la variable «B» (sea de clasificación o de tratamiento) y, al mismo tiempo, tanto «S» como «B» se cruzan con los valores de «A».

De acuerdo con lo discutido en relación a los Diseños de medidas repetidas, se deriva la siguiente categorización.

Diseños de medidas repetidas	Diseños simples de medidas repetidas o de una sola muestra de sujetos.
	Diseños *split-plot* o de «k» muestras de sujetos (Diseños de muestras divididas).

No cabe duda que el Diseño de medidas repetidas puede ampliarse a estructuras más complejas. Es decir, a estructuras de carácter factorial. En efecto, si consideramos el Diseño simple de medidas repetidas, es posible que la variable de «sujetos» se cruce con las combinaciones de los valores de dos o más variables indepedientes. En este caso, el experimento se caracterizaría como un Diseño factorial de medidas repetidas simbolizado por «S×A×B», «S×A×B×C», etc. y, que según la terminología empleada por Lindquist (1953) se denominarían «Tratamientos × Tratamientos × Sujetos», «Tratamientos × Tratamientos × Tratamientos × Sujetos», etc., Por lo que respecta a la técnica *split-plot*, también cabe la posibilidad de factorizar la estructura del experimento tanto en relación a la variable de clasificación («S(B×C)×A»), como en relación a las variables de tratamientos («S(C)×A×B»).

Sin que con esto se pretenda agotar la gran variedad y riqueza de los Diseños de medidas repetidas, hemos intentado presentar un atisbo de las posibilidades que ofrece la metodología del Diseño de medidas repetidas, en su aplicación dentro del ámbito de las ciencias del comportamiento.

3. Fórmula del Diseño

A fin de conseguir un conocimiento más detallado de la estructura interna del Diseño experimental, nos plantearemos la temática relativa a la «fórmula del Diseño». A partir de la fórmula del Diseño, tendremos la posibilidad de conseguir una descripción general y compacta de cualquier situación que puede ser caracterizada mediante la estructura de un Diseño.

Uno de los aspectos más importantes que ha de tenerse en cuenta para definir la estructura de un Diseño experimental es la «clase de relación que se establece entre las variables independientes (factores) que intervienen en la misma» (ya se trate de variables independientes manipuladas como de variables de clasificación).

Son dos las formas cómo los factores o variables independientes pueden relacionarse dentro de la estructura del Diseño: Relación de cruzamiento (combinación) y, relación de anidación (inclusión o subordinación).

A continuación se describirán, de forma separada, cada una de estas relaciones.

3.1. Relación o estructura de cruzamiento

Se entiende por relación de cruzamiento, simbolizada por una «x», a la combinación de los valores de un factor (o variable independiente) con los valores o niveles de los restantes. Considérese, a título de ejemplo, un experimento donde intervienen dos variables independientes simbolizadas por las letras «A» y «B», de modo que la primera actúa a dos niveles ($a=2$) y, la segunda a tres ($b=3$). Se dice que «A» mantiene una relación de cruzamiento con «B», cuando se generan, en el experimento, las siguientes combinaciones (o grupos de tratamiento):

$$a \times b = 6: A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3 \tag{1}$$

Como consecuencia se puede afirmar que cualquier relación de cruzamiento entre dos factores (en el supuesto que sea completa) queda representada por una «x», de forma que el Diseño experimental simbolizado por «A x B» denota un plan experimental de dos variables cruzadas. Este principio puede generalizarse a estructuras más complejas tales como «A×B×C», «A×B×C×D», etc,.

3.2. Relación o estructura de anidación

La relación de anidación implica, de otra parte, que los «valores o niveles distintos de un factor estén incluidos dentro de diferentes niveles de otro». Esta relación supone, como es obvio, la subordinación de un factor a otro.

De acuerdo con esta estructura se tiene que la inclusión de las categorías o valores de una variable independientemente, como por ejemplo la variable «B», dentro de las distintas categorías de otro o variable «A», se simboliza por

$$B(A) \tag{2.1}$$

ó,

$$A \rightarrow B \tag{2.2}$$

Esta misma relación puede representarse diagramáticamente. En efecto, supongamos que la variable de anidación o variable «A» actúa a dos niveles, mientras que la variable anidada o variable «B» a seis. De este modo se tiene

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & B_2 & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ B_4 & B_5 & B_6 \end{array}$$

Si la identificación de las variables sigue un orden de izquierda a derecha, la especificación del Diseño se obtiene incluyendo en la fórmula un listado que dé la cantidad de niveles o categorías contenida dentro de cada uno de los niveles de la variable de anidación (superordinada). De este modo se tiene que

$$a \rightarrow (b_1, b_2, \dots, b_a) \tag{3}$$

define una estructura donde la variable «A» actúa a «a» niveles, de los que «A_1» contiene «b_1» niveles de «B», «A_2» contiene «b_2» niveles de «B», etc. Al aplicar la fórmula (3) a una situación experimental donde se han seleccionado dos niveles de «A» y seis de «B», de modo que se anidan tres valores de «B» dentro de cada nivel de «A», la fórmula del Diseño queda definida por

$$2 \rightarrow (3,3)$$

Obsérvese que la relación de anidación, a diferencia de la de cruzamiento, es asimétrica y en consecuencia «B(A)≠A(B)».

Debe destacarse, de otra parte, que la estructura de anidación puede repetirse a cualquier nivel de profundidad, como cuando se tiene, por ejemplo, la siguiente relación: A→ B→ C ó, «C(B(A))».

Consideremos, por ejemplo, la siguiente fórmula: 2→ (3,2)→ (2,1,2,2,2,). Su representación diagramática toma la siguiente expresión

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
A_1 \\
\swarrow \ \downarrow \ \searrow \\
B_1 \ B_2 \ B_3 \\
\swarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \searrow \\
C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5
\end{array}
& \qquad &
\begin{array}{c}
A_2 \\
\swarrow \ \searrow \\
B_4 \ B_5 \\
\swarrow \ \downarrow \ \downarrow \ \searrow \\
C_6 \ C_7 \ C_8 \ C_9
\end{array}
\end{array}
$$

Es decir, la variable «C» se halla anidada dentro de la variable «B» y, ésta, a su vez, dentro de la variable «A».

3.3. *Fórmula general del Diseño*

Descritas las dos relaciones que pueden darse entre las variables independientes de un experimento, podemos pasar a plantearnos la fórmula general Diseño. En base a esta fórmula quedará claramente especificada su estructura.

En efecto, toda estructura experimental debe incorporar, en el supuesto de que se den, las dos relaciones básicas. El operador de cruzamiento, representado por el símbolo «x», define la naturaleza factorial del experimento. Cuando sólo se halla presente dicha relación el Diseño es categorizado como factorial. Considérese un Diseño trifactorial completo, con dos niveles para el factor «A», tres para el factor «B» y, cuatro para el factor «C». La fórmula del Diseño queda representada por

$$a \times b \times c \tag{4}$$

y, en términos algorítmicos por

$$2 \times 3 \times 4$$

De otra parte, un Diseño simple de medidas repetidas de carácter factorial (es decir, de una sola muestra), como por ejemplo «S×A×B», se define por

$$a \times b \times n \tag{5}$$

Obsérvese que tanto en (4) como en (6), sólo se halla presente la relación de cruzamiento.

Vamos a plantearnos, a continuación, una situación experimental más compleja, como el Diseño *split-plot.* De acuerdo con dicha estructura, los diferentes grupos de sujetos se anidan dentro de los valores de una variable de clasificación y se cruzan con una variable de tratamiento. En este caso, la fórmula del Diseño incorpora tanto la relación de anidación como la de cruzamiento. Sea, por ejemplo, el Diseño «S(A)×B». A nivel de fórmula, la estructura del Diseño queda representada por

$$a \rightarrow (n_1, n_2, \ldots, n_a) \times p \tag{6}$$

La fórmula (6) se interpreta de la siguiente forma: Los valores de la variable «S» (variable de sujetos) se hallan anidados dentro de la variable «A» (variable de clasificación). A su vez, los valores de «S» se combinan con todos los niveles de «B» (que hemos representado en la ec. (6) por «p») que, en este ejemplo, actúa de variable de medidas repetidas.

Analicemos con más detalle la fórmula (6). Se tiene que el lado izquierdo de la «x» representa la estructura de anidación que, en este caso, es simple. En cambio la parte derecha de «x» representa la estructura de cruzamiento que puede ser, de igual modo, simple o factorial.

Tanto la estructura de anidación como la de cruzamiento puede ser simple o factorial. Así, por ejemplo, la siguiente fórmula

$$a \times b \rightarrow (n_1, n_2, \ldots, n_{ab}) \times p \tag{7}$$

representa a un Diseño de medidas repetidas con estructura de anidación factorial y estructura de cruzamiento simple. En cambio,

$$a \times b \rightarrow (n_1, n_2, \ldots, n_{ab}) \times p \times q \tag{8}$$

representa a un Diseño de medidas repetidas, donde tanto la estructura de anidación como la de cruzamiento es factorial. Es decir, un experimento que se ajusta a la siguiente notación: «S(A×B)×C×D».

Estos conceptos que hemos desarrollado son suficientes para una adecuada comprensión de la fórmula del Diseño que, como se ha indicado, refleja su estructura. Debe quedar claro que la estructura sólo recoge la forma cómo se relacionan los distintos factores, de modo que cualquier consideración acerca de la cantidad de registros que se toman por unidad experimental nos permitirá caracterizar al Diseño como uni o multivariable.

4. Modelo de la Regresión Multivariable: Supuestos básicos

Descrita, en el punto anterior, la estructura general del Diseño se requiere, como paso siguiente, la discusión del modelo que nos permita analizar los datos de los experimentos y, al mismo tiempo, sacar consecuencias sustentables acerca de la efectividad de los tratamientos. Ésta constituye, sin duda alguna, una de las tareas más importantes común a todo trabajo de investigación.

Uno de los modelos más familiares, dentro del ámbito de la investigación propia de las ciencias comportamentales, es conocido como Modelo de la Regresión Lineal que puede ser descrito, en forma matricial, por

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{e} \tag{9}$$

donde **y** es un vector de observaciones o registros que han sido obtenidos de las unidades experimentales o sujetos, en relación a una variable criterio o aspecto conductual (variable dependiente); **X**, la matriz de valores de las variables independientes, conocida también como matriz del Diseño; β, el vector de los parámetros o coeficientes de la regresión y, **e** el vector de los errores.

Puesto que desconocemos los elementos de β, el modelo de la ec. (9) nos permite estimar y probar hipótesis acerca de β sobre la base de datos muestrales.

Uno de los criterios utilizables para la estimación de los elementos de β es conocido como Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). En la aplicación de este criterio se requiere que el modelo (9) satisfaga una serie de asunciones. Entre los supuestos más importantes cabe destacar los siguientes:

1. Los diferentes errores asociados a las observaciones o datos son independientes con media cero y varianza común. Por tanto, se tiene que

$$E(\mathbf{e}) = 0 \tag{10.1}$$

$$E(\mathbf{ee}') = V(\mathbf{e}) = \sigma^2 \mathbf{I} \tag{10.2}$$

2. Como consecuencia del punto anterior, se asume que los datos han sido obtenidos de muestras sacadas al azar de una misma población.

3. La matriz del Diseño, **X**, está formada por un conjunto de valores fijos para las diferentes réplicas que se hagan del mismo experimento.

4. Por último, el rango de la matriz **X** debe ser «$q < n$».

A modo de resumen podemos concluir que cuando el tamaño de la muestra es grande y los términos de error se distribuyen normalmente, no sólo se podrán obtener estimaciones de los parámetros de la regresión, sino también, de los errores estándar.

En el grado que se cumplan estos cuatro supuestos, la solución mínima cuadrática para la estimación de β viene dada por

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{11}$$

La propiedad más importante del estimador mínimo cuadrático es que tiene la matriz de covarianza más pequeña que la de cualquier otro estimador lineal (teorema de Gauss-Markov). Estos estimadores son conocidos como estimadores «BLUE» (*best linear unbiased estimator*).

Ahora bien, como señalan Mardia, Kent y Bibby (1979), cuando la matriz de covarianza no es igual a «$\sigma^2 \mathbf{I}$» (o sea, la matriz de covarianza más pequeña posible), entonces el estimador MCO no es el mejor estimador no-sesgado. Sin embargo, mediante una simple transformación, podemos ajustar dicha matriz de covarianza a fin de aplicar el criterio MCO.

En efecto, sea

$$E(e) = 0, \qquad V(e) = \Omega$$

y asumimos que Ω es conocida. Entonces el modelo de la ec. (11) puede ser transformado en

$$z = \Omega^{-\frac{1}{2}}X\beta + u \tag{12}$$

donde

$$z = \Omega^{-\frac{1}{2}}y, \; \Omega\, u = \Omega^{-\frac{1}{2}}e$$

Dado que como es obvio, bajo esta transformación $V(u) = I$, se tiene que el modelo de la ec. (12) cumple el supuesto del teorema de Gauss-Markov. En consecuencia, el estimador de β viene dado por

$$\hat{\beta} = (X'\,\Omega^{-1}X)^{-1}X'\,\Omega^{-1}y \tag{13}$$

Este estimador es conocido como Mínimo Cuadrático Generalizado (MCG) o estimador Aitken.

Hechas estas precisiones acerca del modelo de la regresión lineal, vamos a introducir algunas modificaciones en su notación a fin de que pueda ser aplicado al caso multivariable. Téngase en cuenta que el carácter básico de la Regresión Multivariable consiste en definir a un conjunto de ecuaciones de la regresión, donde cada una de estas ecuaciones se ajusta al modelo general descrito (ec. 9). La única diferencia destacable es que las diversas ecuaciones, que forman el sistema multivariable, se refieren a variables dependientes o criterios de respuesta distintos.

Al igual que se ha hecho con la Regresión Múltiple, el sistema de ecuaciones del modelo multivariable suele ser expresado en forma matricial y compacta por

$$Y = XB + E \tag{14}$$

donde **Y** es una matriz de «n x p» observaciones; **X**, una matriz de «n x q» valores de los factores explicativos o variables independientes (matriz del Diseño); **B**, una matriz de «q x p» parámetros de regresión y, **E**, la matriz «n x p» de los errores aleatorios.

Obsérvese que la diferencia más clara entre el modelo (9) y (10) es el cambio de los vectores por matrices a excepción de **X**.

Por lo que respecta a los supuestos, la aplicación del Modelo de la Regresión Multivariable requiere el cumplimiento de suposiciones similares a las del Modelo de la Regresión Lineal y al mismo tiempo, dada su estructura, incorpora las posibles relaciones existentes entre las distintas dimensiones o atributos del sistema observacional.

Antes de pasar a describir los supuestos del Modelo de la Regresión Multivariable, transcribiremos, con el propósito de simplificar, la fórmula general del modelo (ec. 14), en forma vectorial. De este modo se tiene que

$$\mathbf{Y}_V = \mathbf{X}_V\mathbf{B}_V + \mathbf{E}_V \tag{15}$$

En el supuesto que, por ejemplo, tuviésemos un experimento bivariable (de dos variables dependientes), entonces la ecuación (15) se expresaría por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 \\ 0 & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{X}_v \times \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v$$

donde $\mathbf{Y}_V$ es un vector «2n x 1» de respuesta; $\mathbf{X}_V$, una matriz «2n×2q» que, debido a su especial disposición ha sido denominada, por algunos autores, como «matriz diagonal de bloque» (Dunteman, 1984); $\mathbf{B}_V$, un vector «2q×1» de parámetros de regresión y, $\mathbf{E}_V$ un vector «2n×1» de residuales o errores.

Por lo que respecta a los supuestos del Modelo, cabe destacar lo siguiente:

1. En primer lugar, se asume que el vector $\mathbf{E}_V$ posee una media de cero y una matriz de covarianza, $V(\mathbf{E}_V)=\Omega=\Sigma \otimes \mathbf{I}_n$ (el producto Kronecker, entre ambas matrices).

Por tanto, se tiene que

$$E(\mathbf{E}_V) = 0 \tag{17.1}$$

$$E(E_vE_v') = E \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1' & e_2' \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} e_1e_1' & e_1e_2' \\ e_2e_1' & e_2e_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(e_1e_1') & E(e_1e_2') \\ E(e_2e_1') & E(e_2e_2') \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I} & \sigma_{12}\mathbf{I} \\ \sigma_{21}\mathbf{I} & \sigma_{22}\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

que, como se ha indicado, constituye la matriz de covarianza del Modelo de la Regresión Multivariable para el caso concreto de dos variables dependientes.

Obsérvese que las varianzas de los errores del sistema, asociados a las diferentes variables dependientes, se definen de forma que

$$E(e_1e_1') = \sigma_1^2I;\ E(e_2e_2') = \sigma_2^2I, ...,\ E(e_pe_p') = \sigma_p^2I \tag{17.3}$$

Como consecuencia, las varianzas de los residuales o errores de las diferentes ecuaciones quedan definidas en términos de una matriz diagonal, lo que implica una varianza común. Es decir, para los diferentes «n» observaciones o registros de cualquiera de las variables dependientes «y», las varianzas de los errores deben ser iguales, tal como queda especificado mediante la matriz de identidad de orden «n x n».

Un aspecto peculiar del Modelo de la Regresión Multivariable, hace referencia a la estructura de la relación cruzada entre los errores asociados a variables de respuesta diferentes (por lo que respecta a una misma unidad, caso o sujeto experimental). Estos errores pueden, como es obvio, estar correlacionados y es, precisamente, esta correlación una de las características más específicas que incorpora el Modelo multivariable.

En base a esta particularidad, se tiene que

$$\begin{array}{l} E(e_1e_2') = \sigma_{12}\mathbf{I},\ E(e_1e_3') = \sigma_{13}\mathbf{I}, ...,\ E(e_1e_p') = \sigma_{1p}\mathbf{I} \\ E(e_2e_1') = \sigma_{21}\mathbf{I},\ E(e_2e_3') = \sigma_{23}\mathbf{I}, ...,\ E(e_2e_p') = \sigma_{2p}\mathbf{I} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E(e_pe_1') = \sigma_{p1}\mathbf{I},\ E(e_pe_2') = \sigma_{p2}\mathbf{I}, ...,\ E(e_pe_{p-1}') = \sigma_{pp-1}\mathbf{I} \end{array} \tag{17.4}$$

o, las covarianzas entre las distintas variables dependientes.

Consideremos, de nuevo, el caso bivariable. En el supuesto que $E(e_1e_2')$ sea cero, entonces la dos ecuaciones de la regresión, que constituyen el sistema multivariable, serían completamente independientes. Deberíamos, por tanto, proceder a la prueba de las hipótesis relativas a los parámetros de forma separada. Es decir, sería inútil, en este caso, aplicar un Análisis Multivariable de la Varianza.

2. La matriz $\mathbf{X}_v$, o matriz de Diseño, es una matriz fija de rango «q» (es decir, igual a la cantidad de parámetros). Si esto es así, entonces $\mathbf{X}_v'\mathbf{X}_v$ es una matriz no singular con determinante distinto de cero, por cuya razón es invertible. De otra parte, «q» debe ser menor que la cantidad de casos en la muestra, de modo que pueda ser estimada la variancia del error.

En el supuesto de que se cumplan los requerimientos del Modelo de la Regresión Multivariable, se puede proceder a aplicar algún criterio para la estimación de los parámetros. Ahora bien, como se ha indicado anteriormente, en el caso multivariable la matriz de covarianza, $V(E)=E(E_vE_v')$, no es igual a $\sigma^2\mathbf{I}$, sino más bien a $\Sigma \otimes \mathbf{I}$. No se trata, por tanto, de una simple matriz diagonal de varianzas comunes, sino más bien otra matriz mucho más compleja donde se hallan presentes las correlaciones entre los residuales asociados a las mismas unidades. Dada, pues, la estructura de dicha matriz, no va a ser posible aplicar el criterio de mínimos cuadrados ordinarios para la estimación de los parámetros. No obstante, la utilización del criterio de mínimos cuadrados generalizados o de Aitken (1934), que como se ha comprobado constituye una generalización del teorema de Gauss-Markov, puede considerarse una correcta solución del problema. Para ello es suficiente transcribir el modelo en forma vectorial (ec. 15), de modo que

$$B_v = (X_v' \Omega^{-1} X_v)^{-1} X_v' \Omega^{-1} Y_v \qquad (18)$$

constituye un estimador lineal no-sesgado que satisface, plenamente, el teorema de Gauss-Markov.

5. Prueba de hipótesis

En toda investigación experimental, la hipótesis que básicamente nos interesa se relaciona con los parámetros del modelo. Según el tipo de Diseño, estos parámetros pueden representar una mera asociación entre las variables (parámetros de regresión) o, un impacto o efecto causal (parámetros causales), (Dwyer, 1983). De este modo, se tiene que el Diseño determina la naturaleza del parámetro y esto depende, como es obvio, de la manipulación o no de las variables independientes.

Consideremos, en primer lugar, el caso univariable donde la hipótesis de nulidad acerca de los parámetros causales, en base a datos de diferencia o ajustados a la media del experimento, se expresa por

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} = 0 \qquad (19)$$

Esta hipótesis de nulidad la iríamos aplicando a cada una de las variables dependientes y probaríamos su significación estadística mediante el estadístico **F** univariable. El estadístico **F** es la razón de dos variables chi-cuadradas (χ^2) distribuidas independientemente, cada una de ellas dividida por sus respectivos grados de libertad. Siendo el numerador de esta razón la SC debida a la regresión dividida por sus grados de libertad y el denominador, la SC del error o residual dividida por sus grados de libertad. De este modo se tiene que

$$F = \frac{\beta' X' y/(k)}{e'e/(n-k-1)} = \frac{(n-k-1)\,\beta X' y}{(k) e'e} \qquad (20)$$

Una de las consecuencias del Modelo de la Regresión Lineal, es que la Suma de Cuadrados de las desviaciones entre los datos y su media poblacional se descompone en una Suma de Cuadrados debida a la regresión y, una Suma de Cuadrados debida al error o residual (Lunneborg y Abbott, 1983). Por tanto, que

$$\mathbf{y'y} = \beta'\mathbf{X'y} + \mathbf{e'e} \tag{21}$$

Y puesto que $\beta'\mathbf{X'y} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}$, donde $\hat{\mathbf{y}}$ es el vector de valores predichos o teóricos, se tiene que la ec. (21) puede reformularse por

$$\mathbf{y'y} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e'e} \tag{22}$$

$$SC(T) = SC(H) + SC(E)$$

Es decir, parte de la variación total de las desviaciones de los puntajes queda explicada por lo que se espera de la manipulación experimental y parte, por los factores aleatorios y no controlados.

Este razonamiento lógico puede generalizarse, por analogía, a una situación multivariable donde la hipótesis de interés sobre los parámetros queda expresada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11}\ \beta_{12} \cdots \beta_{1p} \\ \beta_{21}\ \beta_{22} \cdots \beta_{2p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{k1}\ \beta_{k2} \cdots \beta_{kp} \end{bmatrix} = 0 \tag{23}$$

y las matrices que sustituyen a los vectores del Modelo de la Regresión Lineal por

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_p)$$
$$\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_p)$$
$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p)$$

En virtud de esta analogía se verifica que

$$\mathbf{Y'Y} = \hat{\mathbf{Y}}'\hat{\mathbf{Y}} + \mathbf{E'E} \tag{24}$$

cuya aplicación al caso de dos variables dependientes es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1' \\ \mathbf{y}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1' \\ \hat{\mathbf{y}}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2' \end{bmatrix}$$

siendo su desarrollo

$$\begin{bmatrix} y_1' y_1 & y_1' y_2 \\ y_2' y_2 & y_2' y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1' \hat{y}_1 & \hat{y}_1' \hat{y}_2 \\ \hat{y}_2' \hat{y}_2 & \hat{y}_2' \hat{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1' e_1 & e_1' e_2 \\ e_2' e_1 & e_2' e_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{SCPC(T)} = \text{SCPC(H)} + \text{SCPC(E)}$$

De acuerdo con la igualdad anterior se puede verificar la correspondencia entre el modelo univariable (ec. 22) y el modelo multivariable (ec. 25). En efecto, la matriz Suma de Cuadrados y Productos Cruzados de todas las observaciones (SCPC(T)), se descompone en dos matrices básicas: La matriz Suma de Cuadrados y Productos Cruzados debida al modelo explicativo (SCPC(**H**)) y, la matriz Suma de Cuadrados y Productos Cruzados debida al error (SCPC(E)). Esta descomposición es equivalente a la efectuada con la SC total del Análisis de la Regresión lineal.

Esta misma analogía se mantiene en relación a la prueba de hipótesis. Si como se ha dicho, en el Modelo de la Regresión lineal el estadístico para probar la hipótesis «$\beta = 0$» se obtiene de la razón entre la SC de la regresión y la SC del error multiplicada por la constante «(n-k-1)/(k)», en el Modelo de la Regresión Multivariable la prueba de la hipótesis «$\mathbf{B} = 0$» se basa en un contraste similar. Es decir, $(\mathbf{Y'Y})\ (\mathbf{E'E})^{-1}$ que, como se verá más adelante, posee una serie de distribuciones conocidas.

Con el propósito de simplificar y unificar notaciones, nos referiremos a la matriz debida a la regresión o al modelo, **Y'Y**, como matriz de la Hipótesis y la simbolizaremos por **H** (o de forma más completa, SCPC(**H**)). Al mismo tiempo, la matriz del error, **E'E**, la representaremos por **E** (o de forma más completa, por SCPC(E)). De este modo, el estadístico de la prueba es alguna función de $\mathbf{HE}^{-1}$.

En el supuesto que el experimento posea dos variables dependientes, $\mathbf{HE}^{-1}$ es una matriz 2×2. En casos más generales de «p» variables dependientes, dicha matriz es de orden «p x p». Es interesante destacar que cuando los elementos de la matriz **E** son divididos por sus apropiados grados de libertad, se obtiene una estimación de la matriz Σ.

Dado que $\mathbf{HE}^{-1}$ es una matriz, uno de los problemas que se nos plantea es cómo reducirla a un sólo número cuya distribución de muestreo sea conocida bajo hipótesis de nulidad.

A continuación describiremos los diferentes estadísticos que se han formulado como prueba de hipótesis de nulidad multivariable y que son función de las raíces de la ecuación determinantal en «λ», cuya expresión es

$$|\mathbf{H} - \lambda \mathbf{E}| = 0 \quad (26)$$

Los estadísticos más frecuentemente utilizados que se basan en las raíces de la ecuación determinantal (ec. 26) o valores de «λ» son:

1. Criterio de la raíz más grande, ya sea en forma de F generalizada o criterio de Roy ($\mathbf{F}_0$).
2. Criterio de la traza (Lawley-Hotelling).
3. Criterio de la razón de verosimilitud (Wilks).

5.1. Criterio de la raíz más grande

Los valores empíricos de la **F** generalizada (F_o) se obtienen de

$$F_o = \frac{t}{r} \lambda_1 \tag{27}$$

donde «λ_1» es el valor más grande de las raíces de la ecuación determinantal. Los valores críticos de este estadístico se hallan en las tablas de la **F** generalizada, entrando con los siguientes argumentos:

a): $r = k_h - p + 1$

b): s = menor «k_h, p» (el valor más pequeños de los dos).

c): $t = (n - k_h) - p + 1$, ó $(k_e - p) + 1$

donde «k_h» es la cantidad de g.l. asociados a los tratamientos; k_e, los g.l. asociados al error; «p», la cantidad de variables dependientes y, «n» la cantidad de observaciones de la muestra (frecuentemente se simboliza por N).

Alternativamente los valores críticos de la raíz más grande pueden calcularse mediante la fórmula

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} \tag{28}$$

estos valores han sido tabulados por Heck (1960) con los argumentos «s» y

$m = (1/2)(k_h - p - 1)$

$n = (1/2)(n - k_h - p - 1)$ ó, $(1/2)(k_e - p - 1)$

Con estos mismos argumentos hay una tabulación de los valores críticos elaborada por Pillai (1960).

5.2. Criterio de la traza

Hotelling (1951) propuso, por su parte, el siguiente criterio:

$$T_o^2 = k_e \mathrm{tr}\,(\mathbf{HE})^{-1} \tag{29}$$

siendo la traza (tr) de la matriz «$\mathbf{HE}^{-1}$» la suma de los elememtos de la diagonal principal. Este mismo criterio puede expresarse, también, en términos de las sumas de las raíces pro-cero de la ecuación determinantal

$$T_o^2 = k_e \sum_{k=1}^{s} \lambda_k$$

donde «s» es el menor de «k_h, p».

Pillai (1960), ha tabulado el estadístico

$$U_s = \Sigma \lambda_k \tag{31}$$

en términos de los argumentos «s», «m» y «n», donde «λ_k's» son, también, las raíces no-cero de la ecuación determinantal.

5.3. Criterio de la razón de verosimilitud

La prueba de la hipótesis conforme al criterio de la razón de verosimilitud se basa en el cálculo de «Δ» (lambda) de Wilks (1932). Esta razón se obtiene de

$$\Delta = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E}+\mathbf{H}|} \tag{32}$$

o bien, de

$$\Delta = \Sigma \frac{1}{1+\lambda_k} \tag{33}$$

Según Rao (1952, 1965), se puede obtener una aproximación a la distribución F univariable por

$$F' = \left(\frac{1 - \Delta^{1/t}}{\Delta^{1/t}}\right)\left(\frac{mt - 2k}{ph_k}\right) \tag{34}$$

siendo

$$\begin{aligned} m &= k_e + k_h - (k_h + p + 1)/2 \\ t &= [(p^2 k_h^2 - 4)/(p^2 + k_h^2 - 5)]^{1/2} \\ k &= (pk_h - 2)/4 \end{aligned} \tag{35}$$

Se entra en las tablas de **F** con «pk_h» grados de libertad para el numerador y «mt−2k» grados de libertad para el denominador. Cuando «$pk_h = 2$», entonces t es puesto igual a la unidad.

Otra aproximación a la distribución **F** se encuentra en Pedhazur (1982), en la expresión siguiente

$$F = \frac{(1 - \Delta)/p}{\Delta/(n - p - 1)} \tag{36}$$

Para este valor de **F** se entra en las tablas con «p» y «n−p−1» grados de libertad.

6. Diseño experimental multivariable de dos grupos

Supongamos que un investigador desea comparar la eficacia de dos sistemas instruccionales, en base a los ítemes correctamente resueltos de dos formas paralelas de un cuestionario de 20 preguntas. Elige, al azar, de cada grupo instruccional 8 sujetos y obtiene la siguiente matriz de datos.

Matriz de datos del Diseño

	A_1		A_2	
Ss.	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
1	5	7	14	16
2	9	8	17	15
3	10	9	18	19
4	7	10	15	11
5	8	6	16	18
6	11	15	19	19
7	9	8	14	16
8	13	13	19	18
$\Sigma(\ )$	72	76	132	132
$\Sigma(\ )^2$	690	788	2208	2228
ΣY_1Y_2	721		2201	
$\bar{Y}.$	9	9.5	16.5	16.5

Con el propósito de tabular los datos del experimento, representaremos las variables dependientes mediante vectores (vectores de observación) y, codificaremos la variable de tratamiento con 0's y 1's (vectores *dummy*). Para el efecto de la constante utilizaremos un vector equiangular de unos.

Tabulación dummy *del Diseño*

Ss.	Y_1	Y_2	X_0	X_1	X_2
1	5	7	1	1	0
2	9	8	1	1	0
3	10	9	1	1	0
4	7	10	1	1	0
5	8	6	1	1	0
6	11	15	1	1	0
7	9	8	1	1	0
8	13	13	1	1	0
9	14	16	1	0	1
10	17	15	1	0	1
11	18	19	1	0	1
12	15	11	1	0	1
13	16	18	1	0	1
14	19	19	1	0	1
15	14	16	1	0	1
16	19	18	1	0	1

Para el cálculo de las matrices SCPC's del Diseño procederemos en dos fases. En una primera fase, descompondremos la matriz (SCPC(T) en dos submatrices: SCPC(G) y SCPC(E). En una segunda fase, la matriz SCPC(G) se descompondrá en otras dos submatrices: SCPC(M) o matriz del término constante o media global y, SCPC(H) o matriz del efecto de los tratamientos. Esta descomposición sucesiva puede representarse esquemáticamente por

$$\text{SCPC(T)} \begin{cases} \text{SCPC(G)} \begin{cases} \text{SCPC(M)} \\ \text{SCPC(H)} \end{cases} \\ \text{SCPC(E)} \end{cases}$$

A) Descomposición de la matriz SCPC(T)

En esta primera fase se calcularán las dos submatrices en que se descompone la matriz SCPC total. Es decir la matriz SCPC de grupos y la matriz SCPC del error.

TABLA 1. CUADRO RESUMEN DEL AMVAR, DE LA PRIMERA FASE

F.V.	g.l.		SCPC(simétrica)
Entre grupos	k	SCPC(G):	$Y'X(X'X)^{-1}X'Y$ (datos directos)
			$nY.'Y.$ (datos de medias)
Intra grupos	k(n-1)	SCPC(E):	$Y'(I-X(X'X)^{-1}X')Y$
			SCPC(T) − SCPC(G)
Total	N = kn	SCPC(T):	$Y'Y$

a.1. Cálculo de la matriz SCPC(G).
Datos directos: $Y'X(X'X)^{-1}X'Y$
primer paso: $Y'X$

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 9 & 13 & 14 & 17 & 18 & 15 & 16 & 19 & 14 & 19 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 15 & 8 & 13 & 16 & 15 & 19 & 11 & 18 & 19 & 16 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 204 & 72 & 132 \\ 208 & 76 & 132 \end{bmatrix}$$

segundo paso: **Y'X(X'X)⁻¹X'Y**

$$\begin{bmatrix} 204 & 72 & 132 \\ 208 & 76 & 132 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 204 & 208 \\ 72 & 76 \\ 132 & 132 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2826 & 2862 \\ 2862 & 2900 \end{bmatrix}$$

Téngase en cuenta que la matriz **(X'X)** no es rango completo y, por tanto singular (su determinante es cero). Por ello se ha aplicado el procedimiento de la «inversa generalizada».

Datos de medias: n**Y'Y.**

En base a las medias de Y_1 y Y_2, para los tratamientos A_1 y A_2, respectivamente, se forma la matriz de medias. A continuación, se multiplica el resultado del producto de la transpuesta de la matriz de medias por ella misma, por la constante «n» (cantidad de sujetos por grupo de tratamiento). Así se tiene

$$8 \begin{bmatrix} 9 & 16.5 \\ 9.5 & 16.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 9.5 \\ 16.5 & 16.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2826 & 2862 \\ 2862 & 2900 \end{bmatrix}$$

Queda de esta forma demostrada la equivalencia de los dos procedimientos de cálculo.

a.2. Cálculo de la matriz SCPC(E).

Aplicando el sistema de sustracción se tiene:

primer paso: SCPC(T) ó, **Y'Y**

La matriz producto de la transpuesta de la matriz de observaciones por ella misma, es una matriz **(Y'Y)** formada por las SC's de cada una de las variables dependientes (elementos de la diagonal principal) y las SP's entre ambas, (elementos externos de la diagonal principal). De la matriz de datos del Diseño se tiene:

$$\begin{bmatrix} 690+2208 & 721+2201 \\ 721+2201 & 788+2228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2898 & 2922 \\ 2922 & 3016 \end{bmatrix}$$

segundo paso: SCPC(**E**) = SCPC(**T**) − SCPC(**G**)

$$\begin{bmatrix} 2989 & 2922 \\ 2922 & 3016 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2826 & 2862 \\ 2862 & 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 60 \\ 60 & 116 \end{bmatrix}$$

TABLA 2. CUADRO RESUMEN DEL AMVAR DEL DISEÑO, PRIMERA FASE

F.V.	g.l.	SCPC(simétrica) Y_1 Y_2	
Entre grupos	2	SCPC(**G**):	$\begin{bmatrix} 2826 & \\ 2862 & 2900 \end{bmatrix}$
Intra grupos	14	SCPC(**E**):	$\begin{bmatrix} 72 & \\ 60 & 116 \end{bmatrix}$
Total	16	SCPC(**T**):	$\begin{bmatrix} 2898 & \\ 2922 & 3016 \end{bmatrix}$

*B) Descomposición de la matriz SCPC(*G*)*

Con el propósito de calcular la matriz (SCPC(**H**) debida a los tratamientos, procederemos a la descomposición, en una segunda fase, de la matriz SCPC(**G**) en dos submatrices: La matriz SCPC(**M**) que recoge el efecto de la constante y, la matriz SCPC(**H**) que recoge la hipótesis del experimento.

TABLA 3. CUADRO RESUMEN DEL AMVAR, DE LA SEGUNDA FASE

F.V.	g.l.		SCPC(simétrica)
Término constante	k	SCPC(**M**):	(n/k)**Y.**'11'**Y.** (datos medias)
Entre tratamientos	k-1	SCPC(**H**):	n**Y.**' (**I**-(1/k)11')**Y.** (datos medias) SCPC(**G**) SCPC(**M**)
Entre grupos	k	SCPC(**G**):	n**Y.**'**Y.** (datos medias)

b.1. Cálculo de la matriz SCPC(**M**).
Datos de medias: (n/k)**Y**.'**11**'**Y**.

$$8/2 \begin{bmatrix} 9 & 16.5 \\ 9.5 & 16.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 9.5 \\ 16.5 & 16.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2601 & 2652 \\ 2652 & 2704 \end{bmatrix}$$

b.2. Cálculo de la matriz SCPC(**H**).
Datos de medias: n**Y**.' (**I** − (1/k)**11**')**Y**.

$$8 \begin{bmatrix} 9 & 16.5 \\ 9.5 & 16.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 9.5 \\ 16.5 & 16.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 225 & 210 \\ 210 & 196 \end{bmatrix}$$

Por sustracción: SCPC(**G**) — SCPC(**M**)

$$\begin{bmatrix} 2826 & 2862 \\ 2862 & 2900 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2601 & 2652 \\ 2652 & 2704 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 & 210 \\ 210 & 196 \end{bmatrix}$$

En efecto se tiene que

Y'Y = SCPC(**G**) − SCPC(**M**) = SCPC(**H**).

Tabla 4. Cuadro resumen del AMVAR del diseño			
F.V.	g.l.		SCPC(simétrica) Y_1 Y_2
Término constante	1	SCPC(M):	$\begin{bmatrix} 2601 & \\ 2652 & 2704 \end{bmatrix}$
Entre tratamientos	1	SCPC(H):	$\begin{bmatrix} 225 & \\ 210 & 196 \end{bmatrix}$
Entre grupos	2	SCPC(G):	$\begin{bmatrix} 2826 & \\ 2862 & 2900 \end{bmatrix}$
Intra grupos	14	SCPC(E):	$\begin{bmatrix} 72 & \\ 60 & 116 \end{bmatrix}$
Total	16	SCPC(T):	$\begin{bmatrix} 2898 & \\ 2922 & 3016 \end{bmatrix}$

7. Pruebas de significación

7.1. F *generalizada*

Con objeto de calcular el valor empírico de la **F** generalizada, $\mathbf{F}_o$, deben computarse las raíces características de la ecuación determinantal: $|\mathbf{H} - \lambda \mathbf{E}| = 0$.

Dado que de la tabla 4, se tienen los valores de las matrices SCPC(**H**) y SCPC(**E**), obtendremos, en primer lugar, las raíces características de la ecuación determinantal siguiente:

$$\left| \begin{bmatrix} 225 & 210 \\ 210 & 196 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 72 & 60 \\ 60 & 116 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (225 - 72) & (210 - 60) \\ (210 - 60) & (196 - 116) \end{vmatrix}$$

El determinante de dicha matriz es una ecuación de segundo grado. Es decir,

$$4752\,\lambda^2 - 15012\,\lambda = 0$$

siendo los valores de las dos raíces de esta ecuación cuadrática: 0 y 3.1591.

TABLA 5. ARGUMENTOS PARA EL CÁLCULO DE F_o			
λ_1	r	s	t
3.1591	2	1	13

Aplicando la fórmula de la **F** generalizada a los datos anteriores, se tiene

$$F_o = \frac{t}{r}\lambda_1 = \frac{13}{2}(3.1591) = \mathit{20.534}$$

Entrando en las tablas de la distribución de **F** generalizada para «s=1, r=2 y, t=13» y para un nivel de significación de «α=0.05», se halla un valor teórico de 3.81. En consecuencia se infiere la no aceptación de H_o y se concluye efectividad diferencial de tratamientos.

7.2. Criterio de la traza

De acuerdo a este criterio se suman la raíces características no-cero. Así, de acuerdo con la ec. (31) se tiene que

$$U_s = \mathit{3.1591}$$

Entrando en las tablas de Pillai (1960), con los argumentos

$$P_1 = s = \text{menor } (k_h, p) = 1$$
$$P_2 = m = (1/2)(k_h - p - 1) = 0$$
$$P_3 = n = (1/2)(k_e - p - 1) = 5.5$$

Los valores críticos de U_s, para $p_1=1$, se hallan fuera del rango de argumentos tabulados por Pillai (1960). Ahora bien, para un nivel de significación de 0.05 y para $p_1=2$, $p_2=0$ y $p_3=5$, el valor crítico es de 0.651. De esto se infiere el rechazo de la hipótesis de nulidad.

7.3. Criterio de la razón de verosimilitud

La prueba de hipótesis basada en el criterio de la razón de verosimilitud viene dada por el cálculo de «Δ» (ec. 33).

$$\Delta = \frac{1}{1+3.1591} = 0.2404$$

siendo la aproximación de Rao (1965) al estadístico univariable, ec. (34),

$$F' = (\frac{1-0.2404}{0.2404})\,(\frac{13}{2}) = 20.54$$

Por último, la aproximación a la **F** univariable puede obtenerse de la ecuación 36. Es decir,

$$F = \frac{(1-0.2404)/2}{(0.2404)/13} = 20.54$$

7.4. Contraste de medias

Las medias de las variables dependientes bajo cada uno de los dos tratamientos pueden representarse mediante los vectores

$$\bar{Y}_{.1} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9.5 \end{bmatrix} ; \; \bar{Y}_2 = \begin{bmatrix} 16.5 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

Para someter a prueba la hipótesis «$\mu_1 = \mu_2$», se puede aplicar el análogo multivariado del estadístico «t» de Student. Es decir, el estadístico T^2 de Hotelling.

En efecto, sea

$$\mathbf{d}_{12} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_{.2} = \begin{bmatrix} -7.5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

entonces, la T^2 de Hotelling, se computa a partir de la expresión

$$T^2 = (\frac{k_e n}{2})\, \mathbf{d}_{12}'\mathbf{E}^{-1}\mathbf{d}_{12} \tag{37}$$

donde «k_e» son los g.l. asociados a la matriz **E**. De este modo se tiene

$$T^2 = (\frac{(14)\,(8)}{2}) \begin{bmatrix} -7.5, & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02441 & -0.01262 \\ -0.01262 & 0.01515 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= (56)\,(0.79005) = 44.24$$

Bajo el supuesto de hipótesis de nulidad verdadera, se tiene que

$$F = \frac{k_e - p + 1}{k_e p}\, T^2 \tag{38}$$

siendo su distribución, $F(p, k_e - p+1)$. Con los datos del ejemplo, se obtiene el correspondiente valor empírico de **F**.

$$F = \frac{(14-2+1)}{(14)\ (2)} (44.24) = \mathit{20.54}$$

Puede verificarse que este valor coincide con el obtenido mediante las anteriores aproximaciones (Johnson y Wichern, 1982). El valor teórico de **F**, a un nivel de significación de 0.05 y, para 2 y 13 g.l. es 3.81, de lo que se infiere la aceptación de la hipótesis alternativa. En consecuencia, se concluye la diferencia significativa entre los dos tratamientos.

8. A modo de recapitulación

Hemos presentado a lo largo de este escrito los conceptos básicos del Diseño experimental multivariable que constituye, en la actualidad, un poderoso instrumento de investigación en las áreas del comportamiento y una clara alternativa a los esquemas experimentales tradicionales.

Se ha descrito, al mismo tiempo, un esquema experimental básico: El Diseño de dos grupos, partiendo del supuesto de que los sujetos han sido asignados al azar a cada uno de los grupos experimentales. Es evidente, que dicha técnica de análisis es extensible al resto de modelos de investigación experimentales como por ejemplo, los Diseños factoriales y los Diseños de medidas repetidas.

Cabe destacar, en términos generales, que los Diseños multivariables se aplican a situaciones donde se registran dos o más variables de respuesta (o variables dependientes) y al mismo tiempo se tiene en cuenta, en el análisis, la posible relación existente entre las mismas. Ésta constituye, en definitiva, una de las principales características de los diseños multivariables y la razón por la que deben ser preferibles a los modelos univariables (Arnau, en prensa).

RESUMEN

En este escrito se describe la problemática relativa al Diseño experimental multivariable como alternativa a la investigación clásica dentro del ámbito experimental. Se discuten los diferentes modelos de Diseño multivariable, planteándose la fórmula general que recoge tanto la estructura de cruzamiento como la estructura de anidación. A continuación se desarrolla el modelo de la Regresión Multivariable como estructura básica para el contraste de hipótesis de los Diseños experimentales multivariables. Al mismo tiempo se plantean los diferentes estadísticos aplicables a los datos de estos esquemas de investigación. Por último, se analiza un ejemplo práctico como guía para la utilización del procedimiento descrito a lo largo del escrito.

SUMMARY

In this paper we describe questions related to the multivariable experimental design as an alternative to classical research in the experimental field. Different models of multivariable design are discussed and we state a general method which involves the crossing structure as well as the nesting structure. Further on the Multivariable Regression model is developed as a basic structure for the hypothesis proof of multivariable experimental designs. At the same time different statistics applying to these research design data are ser forth. Eventually a practical example is analysed as a guidance to the use of the procedure described in the paper.

REFERENCIAS

Aitken, A.C. (1934). On least-squares and linear combinations of observations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55*, 42-48.

Arnau, J. (en prensa). *Diseños experimentales multivariables. Alternativa analítica a la investigación psicológica y educativa.* México: Trillas.

Bartlett, M.S. (1947). Multivariate analysis. *Journal of the Royal Statistical Society, 9*, 176-197.

Bock, R.D. (1975). *Multivariate statistical methods in behavioral research,* New York: McGraw-Hill.

Dunteman, G.H. (1984). *Introduction to linear models.* Beverly Hills, California: Sage.

Dwyer, J.H. (1983). *Statistical models for the social and behavioral sciences.* New York: Oxford University Press.

Fisher, R.A. (1925). *Statistical methods for research workers.* Edinburgh: Oliver and Boyd.

Fisher, R.A. (1935). *Design of experiments.* Edinburgh: Oliver and Boyd.

Fleiss, J.L. (1986). *The design and analysis of clinical experiments.* New York: Wiley.

Johnson, R.A. y Wichern, D.W. (1982). *Applied multivariate statistical analysis.* Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall.

Kirk, R.E. (1968). *Experimental design: Procedures for the behavioral sciences.* Belmont, California: Brooks/Cole.

Kirk, R.E. (1982). *Experimental design: Procedures for the behavioral sciences* (2da. ed.). Belmont, California: Brooks/Cole.

Lee, W. (1975). *Experimental design and analysis.* San Francisco: Freeman.

Lindquist, E.F. (1953). *Desing and analysis of experiments in psychology and education.* Boston: Houghton Mifflin.

Lunneborg, C.E. y Abbott, R.D. (1983). *Elementary multivariate analysis for behavioral sciences.* New York: North-Holland.

Mardia, K.V., Kent, J.T. y Bibby, M. (1979). *Multivariate analysis.* New York: Academic Press.

McCullagh, P. y Nelder, J.A. (1983). *Generalized linear models.* London: Chapman and Hall.

Pedhazur, E.J. (1982). *Multiple regression in behavioral research* (2da. ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Pillai, K.C.S. (1960). *Statistical tables for tests of multivariate hypothesis.* Manila: University of Philippines Statistical Center.

Rao, C.R. (1952).; *Advanced statistical methods in biometric research.* New York: Wiley.

Rao, C.R. (1965). *Linear statistical inference and its applications.* New York: Wiley.

Stevens, J. (1986). *Applied multivariate statistical for the social sciences.* Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum.

Tukey, J.W. (1947). Dyadic ANOVA, an analysis of variance for vectors. *Human Biology, 21*, 65-110.

Wilks, S.S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika, 24*, 471-494.

Winer, B.J. (1971). *Statistical principles in experimental design* (2da. ed.) Nueva York: McGraw-Hill.