ANUARIO DE PSICOLOGÍA
Núm. 42 - 1989 (3)

LA ADQUISICIÓN DE LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD SEGÚN DIFERENTES TIPOS DE ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS POR EL NIÑO DE 8 A 11 AÑOS

LUZ CARRETERO DE OLEZA
Laboratoire de Psychologie
Centre d'Études des Processus
Cognitifs et du Langage
E.H.E.S.S. Paris

Luz Carretero de Oleza
Laboratoire de Psychologie
Centre d'Études des Processus Cognitifs et du Langage
E.H.E.S.S. Paris

Introducción

La historia demuestra que la ciencia y la tecnología evolucionan con el propósito de resolver problemas. El aspecto más importante en la educación es, probablemente, la utilización de problemas significativos para que el conocimiento, tanto en sus aspectos teóricos como prácticos, pueda ser recibido por los alumnos como una auténtica ayuda en la resolución de problemas reales. Sin embargo, esta condición para que el conocimiento sea a la vez operacional e interesante no se consigue fácilmente.

Piaget ha demostrado que la inteligencia y el conocimiento se desarrollan en un largo periodo de tiempo. Pero lo ha hecho analizando el desarrollo mental del niño en términos de capacidades generales de la inteligencia, esencialmente lógicas, sin ser lo suficientemente atento al contenido específico del conocimiento. Es la necesidad de comprender mejor la adquisición y desarrollo de un conocimiento y de un «saber-hacer» específico, en relación con las situaciones y con los problemas, lo que nos conduce a hablar de «campos conceptuales».

El presente trabajo se inscribe en el marco general del desarrollo cognitivo de los conocimientos matemáticos. Particularmente, concierne al estudio de la adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de *estructuras multiplicativas* (campo conceptual de este trabajo) por el niño de 8 a 11 años. Las investigaciones realizadas en este dominio (G. Vergnaud 1983) prueban la existencia de dificultades importantes a dos niveles diferentes:

1. Dificultades de carácter *psicológico:* la adquisición de dicha noción se efectúa sobre un largo periodo del individuo (de 7 a 16 e incluso 18 años), por lo que está sujeta a aspectos psicológicos «fuertes».

2. Dificultades de carácter *didáctico:* la adquisición de la proporcionalidad está obligatoriamente sujeta a problemas de enseñanza, ya sea porque el modelo matemático propuesto no es siempre asimilado por el alumno, ya sea porque no es utilizado para la resolución de problemas, incluso si éste ha sido comprendido.

De hecho este trabajo pretende contribuir al estudio de las relaciones entre los procesos psicológicos implicados en la adquisición de conocimientos bien definidos y los procesos psicopedagógicos que determinan la capacidad de resolver problemas. Ello significa que dicha investigación pone de manifiesto la necesidad de una doble aproximación, psicológica y didáctica, para poder explicar la especificidad de los comportamientos observados en los alumnos.

Este estudio surgió de las preocupaciones discutidas en el seno del equipo dirigido por el Dr. Gérard Vergnaud en París, a partir de una investigación anterior sobre los conocimientos de la proporcionalidad a nivel de Formación Profesional en el L.E.P. (Liceo de Enseñanza Profesional). Los resultados de dicha investigación, realizada durante el periodo 1982-85, mostraron las dificultades de enseñanza y de aprendizaje que esta noción supone.

Debido a la limitación de este artículo, no nos referiremos a las investigaciones realizadas en este campo. Únicamente, nos centraremos en los aspectos conceptuales, experimentales y metodológicos más importantes de nuestro trabajo.

Aspectos teóricos

Las situaciones de proporción simple, de proporción simple compuesta y de proporción doble, constituyen los elementos principales del «campo conceptual» de este estudio. Por *campo conceptual* se entiende *el conjunto de problemas y situaciones en el que el tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de diferente tipo, pero en estrecha interconexión* (Vergnaud, 1981b).

De esta manera, nuestro objetivo principal es la exploración del efecto de dos tipos de «estructuras multiplicativas (proporción simple y proporción doble) en situaciones-problemas que implican una o varias operaciones de multiplicación y/o de división. Así pues, por «estructuras multiplicativas» entendemos el campo o el espacio conceptual en el que el tratamiento de las situaciones-problemas presentadas al alumno suponen nociones, relaciones, representaciones y operaciones diferentes, pero en estrecha conexión. Como ejemplo, por citar sólo los conceptos más importantes, encontramos: las nociones de proporción simple/proporción doble, las operaciones de multiplicación/división, las relaciones de función lineal/bilineal,...

Por un lado, trataremos la *proporción simple* en dos clases de estructuras:

— el «isomorfismo de medidas» y,

— la «estructura de proporción simple compuesta».

Por otro lado, estudiaremos la *proporcionalidad doble.*

1. *El isomorfismo de medidas o estructura simple* comporta dos variables de dimensión diferente o dos «espacios de medidas» (M1 y M2), dependiendo linealmente el uno del otro. Por ejemplo, la cantidad de compra y su costo (cf. anexo I, problema P1.1).

Esta estructura multiplicativa podemos representarla de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|l} M1 & M2 \\ 1 \longrightarrow & \longrightarrow a \\ & \\ b \longrightarrow & \longrightarrow z \end{array} \qquad \times\, \lambda \text{ o bien, } \quad \begin{matrix} a \\ \uparrow \\ z \end{matrix} \;\; / \,\lambda \text{ (operador escalar)}$$

$$\begin{array}{c|ccc} M1 & & & M2 \\ 1 & \overset{x\lambda}{\longrightarrow} & a & \\ & \overset{/\lambda}{\longleftarrow} & & \\ b & \overset{x\lambda}{\longrightarrow} & z & \\ & \overset{/\lambda}{\longleftarrow} & & \end{array}$$

$\times\ \lambda$ o bien, $/\lambda$ (operador función)

Debemos señalar las siguientes particularidades:

1) Se trata de una relación cuaternaria (cuatro magnitudes están en juego) y no de una ley binaria o de una relación terciaria de la multiplicación ($a \times b = z$). El valor de la magnitud z es lo que el alumno debe calcular.

2) Dos tipos de razonamiento o de relaciones matemáticas son posibles para responder adecuadamente:

2.1) la utilización de un operador escalar ($a \xrightarrow{x\lambda} z$), que permite trasladar en M2 el operador que relaciona *1* con *b* en M1. En el caso de la división este operador actúa inversamente ($a \xleftarrow{/\lambda} z$).

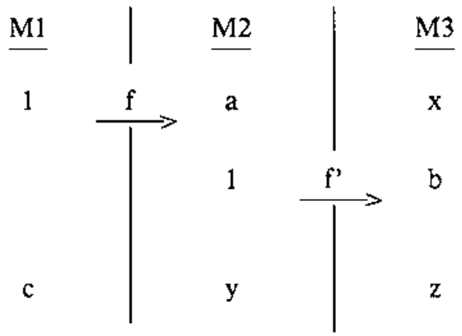
Lo denominamos «escalar» al establecer la relación entre dos magnitudes de un mismo espacio de medidas, sin que aparezca por tanto el aspecto dimensional. Es decir, se trata de una relación vertical en la que «8 caramelos son 3 veces más caros que 1 caramelo». En los protocolos hemos observado un alumno que adiciona 3 veces 8 ($8+8+8$) o bien, efectúa 3×8 para resolver el problema P1.1 (anexo I);

2.2) el otro razonamiento consiste en la utilización de un operador «función» ($b \xrightarrow{x\lambda} z$) para la multiplicación y, de «función inversa» ($b \xleftarrow{/\lambda} z$) para la división (véase esquema). Esta vez se trata de transferir en la línea inferior el operador que une *1* con la magnitud *a* en la línea superior. Aquí la relación establecida entre las dos dimensiones o magnitudes es de carácter «horizontal» (bijectiva). Es el caso del niño que realiza el cálculo siguiente: $3+3+3+3+3+3+3+3=24$ o bien, 8×3 («8 veces 3»), donde 8 es el multiplicador que representa el número de veces que debe iterarse el multiplicando.

Sin embargo, hay que dejar claro que la diferencia entre estas dos conductas (2.1 y 2.2), no siempre se manifestó de forma evidente en nuestras observaciones experimentales.

2. *La estructura de proporción simple compuesta* comporta tres espacios de medidas (M1, M2 y M3) en los que una función f hace pasar una magnitud (en este caso el valor unitario) del primer espacio de medidas (M1) a la magnitud correspondiente en el segundo espacio de medidas (M2). Además, una función f' establece la relación entre M2 y el tercer espacio de medidas (M3).

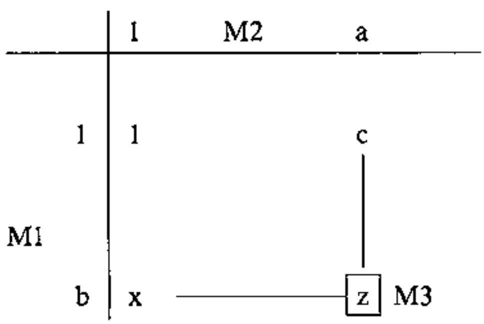
Representaremos esta estructura mediante el siguiente esquema:



3. *La estructura de proporción doble.* En dicha estructura un espacio de medidas, M3 (resultado final) es proporcional a los otros dos espacios de medidas (M1 y M2) diferentes e independientes entre sí.

A diferencia de las estructuras precedentes se trata de una *función bilineal* en la que el valor a buscar es proporcional a dos variables de dimensión diferente.

Esta estructura podemos esquematizarla por un cuadro de doble correspondencia:



Problemática y metodología

La problemática viene determinada por un doble objetivo:

Por un lado, nos proponemos descubrir cuáles son las dificultades psicológicas implicadas en el proceso de adquisición de dichas nociones; por otro lado, queremos conocer y analizar las dificultades pedagógicas que determinan la capacidad de resolver un problema determinado.

La metodología utilizada fue: el examen exhaustivo de los procedimientos utilizados por los niños en la resolución individual de diferentes situaciones-problemas, poniendo especial atención en las dificultades con las que ellos se encuentran, por una parte; por otra, el análisis del origen y el tipo de relaciones, representaciones y operaciones cognitivas subyacentes en las situaciones-problemas planteadas, para poder establecer una eventual génesis.

La hipótesis inicial del trabajo fue que según la estructura multiplicativa subyacente, el grado de dificultad varía e induce a procedimientos sensiblemente diferentes. Así, pensamos que la estructura de proporción doble posee una complejidad mayor respecto a la estructura de proporción simple.

Las hipótesis específicas referentes a la *primera experiencia* fueron las siguientes:

1. Las situaciones-problemas que suponen la utilización de varias operaciones de multiplicación (P1.4 y P1.6) se resuelven con mayor dificultad.

2. Las operaciones de multiplicación pueden teóricamente realizarse en cualquier orden, los diferentes órdenes posibles no están igualmente disponibles en el niño.

3. El orden de presentación de las informaciones en los enunciados influye en la superación de la tarea.

4. El tratamiento de una información expresada en términos escalares («3 veces más» y, «3 veces menos» en la tercera experiencia) no está siempre al alcance del niño.

En la *segunda experiencia*, la hipótesis retenida fue que el hecho de presentar las informaciones en un orden «no natural» provocaría la utilización de «procedimientos puramente numéricos».

Referente a la *tercera experiencia*, las hipótesis fueron las siguientes:

1. El grado de dificultad en una misma clase de estructuras multiplicativas varía según el valor numérico que debe hallarse. Por ejemplo, el problema P2.1 (búsqueda del valor unitario f (1) conociendo x $\rightarrow$ f (x)) respecto al problema P2.2 (búsqueda del valor x conociendo su imagen f (x) y el valor unitario f (1)) supone un grado de dificultad menor, puesto que en el primer caso se trata de una relación «escalar», mientras que en el segundo se trata de una relación «función».

2. El hecho de que un problema de proporción doble suponga dos operaciones sucesivas de división (como en P2.3 con respecto a P2.4) convierte la situación en más difícil.

3. Las situaciones-problemas en que la resolución implica el dominio de dos operaciones de división no es un criterio suficiente para hacer fracasar al alumno.

4. Las situaciones-problemas que comportan al menos dos operaciones aritméticas (una multiplicación y una división o bien, dos divisiones sucesivas) deben ser menos acertadas.

Las *variables experimentales* que hemos querido controlar en nuestras experiencias son principalmente de orden matemático, es decir, hemos controlado el efecto de las diferentes estructuras multiplicativas que acabamos de definir.

Por otro lado, hemos querido controlar una variable de orden lingüístico con la intervención de dos expresiones de cantidad: «3 veces más» y «3 veces menos».

En la elaboración de los problemas presentados hemos tenido también en cuenta las variables o sub-variables siguientes:

1. El *campo de referencia* de las informaciones:
   — mercancías y su coste;
   — producciones agrícolas (litros de leche, quesos).
   — la distribución de objetos en cajas o cucuruchos;
   — el ahorro por persona en un tiempo determinado; etc.
2. El *orden numérico* de los datos:
   — restricción al conjunto de números enteros y naturales.
   — En cuanto al tamaño de los números:
     a) utilización de números pequeños (al menos en los operadores) en la primera y segunda experiencia;
     b) utilización de números grandes y pequeños en la tercera experiencia, por imposibilidad de operar únicamente con números pequeños.

3. La *naturaleza de los datos:* se trata de cantidades «discretas» (caramelos, lápices, huevos, etc.) y «continuas» (litros de leche).

4. Las *tareas cognitivas* solicitadas fueron:
   — elección y realización de un cálculo relacional entre los datos.
   — explicación y justificación del procedimiento utilizado.
   — posibilidad de resolver el problema por otros procedimientos diferentes.
5. En cuanto a las *variables de la situación* de pasación:
   — el grado de familiaridad de los problemas presentados es grande para los sujetos de nuestra muestra (extraída del centro de Paris), quizás algo menos en los dos problemas referentes a la producción agrícola (PI.5 y PI.6).
   — con el fin de contrabalancear los efectos de orden posibles, hemos variado el orden de presentación de los problemas.
   — recurso a la «contra-sugestión», al final de cada sesión. Una vez que todos los problemas han sido efectuados hemos interrogado al alumno sobre las maneras alternativas de proceder para resolver el mismo problema.

Condiciones de pasación:

Hemos seleccionado los sujetos en clases consideradas «normales» y hemos tomado como criterio de selección: *performance* media en matemáticas.

Cada niño ha pasado, individualmente, por las diferentes sesiones de problemas (cinco en total). Nunca se les administraba más de cuatro problemas en una misma sesión.

Los problemas fueron presentados por escrito en forma de ficha, en la cual los datos numéricos y la magnitud física correspondiente se indicaron en rojo en las dos primeras experiencias, mientras que en la tercera todo el enunciado fue escrito en el mismo color.

Duración:

Cada sesión duraba de 20 a 35 minutos.

El hecho de que nuestra muestra no sea enorme se debe, precisamente, a problemas de tiempo, tanto para los maestros como para nosotros, ya que con cada niño necesitábamos entre dos horas y media y tres horas, contando el total de las sesiones.

La muestra:

Exper.	1ª	2ª	3ª
*Cours**:			
CE2 (8-9 a.)	8	8	10
CM1 (9-10 a.)	16	8	23
CM2 (10-11 a.)	20	19	24
TOTAL	44	35	57

* CE2, CM1 y CM2 son tres de los cinco cursos que comprende la enseñanza primaria en Francia y corresponden a 3°, 4° y 5° de E.G.B.

Resultados

Una vez recogidos todos los datos realizamos el análisis de los procedimientos utilizados teniendo en cuenta:

— el tipo de problema y/o la estructura multiplicativa subyacente;

— el nivel escolar y/o la edad del sujeto.

Por un lado, hemos realizado una clasificación hipotética de las conductas que conducen al éxito según un orden progresivo, es decir, en primer lugar hemos retenido los procedimientos que consideramos más «primitivos» para finalizar con los más «canónicos».

Por otro lado, hemos analizado los procedimientos que llevan al fracaso a fin de localizar las dificultades con que se encuentran los niños de la población escogida.

En la primera experiencia, y desde el punto de vista de los resultados de éxito brutos (cf. Anexo II) los protocolos muestran que, contrariamente a lo esperado, no existe una diferencia notable entre los seis tipos de problemas presentados, a excepción de los problemas P1.1 (resuelto correctamente por un 84%) y P1.6 (que no alcanza el 50% de aciertos). Tal como esperábamos el problema P1.1 es muy fácil (100% de éxito en CM2) y el problema P1.6 es claramente el más difícil de la experiencia (0% de aciertos en CE2).

En cuanto al resto de los problemas, la diferencia de porcentajes de acierto oscila entre 63 y 77%. Esto nos lleva a pensar que la estructura multiplicativa subyacente y, la intervención del operador escalar «3 veces más», no son factores que provoquen siempre grandes diferencias entre los distintos problemas. Desde este punto de vista la caída más significativa se produce en el paso de P1.5 a P1.6, sobre todo en los alumnos más jóvenes.

Referente a las diferencias entre los niveles escolares, es evidente que cuanto mayor es el chico mejores resultados consigue; pero hemos observado que la diferencia entre CE2 y CM2 es más notable a medida que el número de operaciones a efectuar aumenta.

En nuestro análisis de respuestas de acierto observadas hemos constatado, en primer lugar, que los procedimientos más utilizados son siempre aquéllos que están favorecidos por el orden de presentación de los datos numéricos en los enunciados (hecho que dará paso a una segunda experimentación), a excepción de la situación P1.6 en la que el procedimiento «escalar» es el más utilizado. En segundo lugar, hemos podido observar que los procedimientos «puramente» numéricos, es decir aquéllos que consisten en combinar los datos sin tener en cuenta el tipo de magnitud referente a cada uno de los números utilizados en el cálculo, prácticamente no se utilizan. Veamos un ejemplo (cf. Anexo I, enunciado P.1.2).

Erminia (10,8 años; CM2):

$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \\ \hline 12 \\ 6 \\ \hline 72 \end{array} \text{ francos}$$

Enseguida la alumna nos explica oralmente lo siguiente: «he encontrado la buena manera, debo multiplicar 3 veces por 4 primero, porque una chocolatina cuesta 4 francos, esto da 12, y 12 multiplicado por 6 ...».

Experimentador: ¿Qué significa este 12? Erminia: «Es el resultado de 3 por 4, son 12 francos, yo creo... Luego, he multiplicado por 6 y me ha dado 72 francos»;

Experimentador: ¿Quién debe pagar 72 francos? Erminia: «Jean-Claude» (sic).

Este hecho es todavía más remarcable en los problemas P1.4 y P1.6, en los que la elección podía realizarse sobre ocho procedimientos puramente numéricos distintos. A nuestro parecer, esta conducta representa el razonamiento más «evolucionado» de la experiencia, ya que supone que el niño es capaz de tratar los «números» en su sentido puro y no como magnitudes físicas, lo cual implicaría el dominio total de las propiedades de la commutatividad y de la asociatividad de la multiplicación.

En cuanto a los porcentajes obtenidos sobre los diferentes procedimientos de fracaso, observamos que la repartición es bastante dispersa. No obstante, constatamos que en los problemas referentes a la intervención de un operador escalar explícito, el error más frecuente es la interpretación aditiva de la relación escalar, a excepción del problema P1.6. De esta manera, un 27% de los sujetos interpretan «3 veces más» como «3 de más» o «3 más» (*3 en plus*). A nuestro modo de ver, es el tipo de error más interesante puesto que manifiesta la ambigüedad de la expresión lingüística: «3 veces más que». El término «veces», que indica al mismo tiempo una multiplicación lógica y una multiplicación aritmética, pierde su significado en provecho del término «más». Así, en el siguiente ejemplo, nos encontramos que la expresión «3 veces más que Jean-Claude» es comprendida como: «3 de más que Jean-Claude».

Virginie (10,9 a.; CM2) cuando efectúa los cálculos para resolver el problema P1.2 escribe lo siguiente:

$4+4+4+4+4+4=24$
$6\times4=24$*
$6+3=9$
$4+4+4+4+4+4+4+4+4=36$
$9\times4=36$*

* Después de haber efectuado largas operaciones de adición (en forma de columna), se da cuenta de la posibilidad de una multiplicación para simplificar sus cálculos.

Explicación de Virginie: «6 veces 4 o bien, 4 más 4 más 4 ... = 24, Jean-Claude debe pagar 24 francos y luego, la multiplicación 6 por 4 da la misma cosa. Ahora, como Gilles compra 3 veces menos entonces 6+3=9 chocolatinas. He añadido porque Gilles tiene tres veces más, esto da 36, 36 francos que paga Gilles».

Por otro lado, hemos constatado que el olvido de un dato es frecuente, sobre todo, en los dos problemas de proporción doble (P1.5 y P1.6) y en P1.4.

Finalmente, hemos observado otros tipos de error (como la utilización de operaciones de adición o de división), pero con una frecuencia bastante débil.

Durante una *segunda experiencia* en la que nos propusimos controlar el efecto del orden de presentación de las informaciones, los resultados obtenidos muestran por un lado, que el periodo de casi dos meses de intervalo entre las experiencias ha sido suficiente para hacer progresar considerablemente a los alumnos de 8-9 años (CE2), especialmente en los problemas P1.3 y P1.4.

Por otro lado, hemos podido constatar que el hecho de presentar las informaciones en un orden que no concuerda con el de las operaciones más «naturales» sobre las magnitudes, no conduce a una caída sensible de los aciertos. Sin embargo, encontramos un ligero aumento en la utilización de procedimientos «puramente» numéricos.

En la *tercera experiencia* (cf. Anexo II) concerniente a la operación de división, hemos podido constatar que existen diferencias notables entre la estructura de proporción simple (P2.1 y P2.2) y la estructura de proporción doble (P2.3 y P2.4), de acuerdo con nuestra hipótesis inicial. Esta vez, hemos observado que en los dos problemas de proporción simple, el índice de acierto es de 86 y 94%, respectivamente; en cambio, en los dos problemas de proporción doble se da un descenso de hasta un 25 y 28%. Lo cual nos permite mantener la hipótesis de que la relación bi-dimensional entre tres espacios de medidas supone mayores dificultades.

Sin embargo, entre los problemas P2.1 y P2.2, que suponen cálculos relacionales diferentes, no se observan diferencias importantes. Asimismo, hemos comprobado que la mayoría de alumnos que aciertan en P2.1, aciertan también en P2.2 y, viceversa. De la misma manera, aquéllos que fracasan en P2.3, fracasan en P2.4.

Por otro lado, hemos verificado que la introducción de una relación escalar explícita («3 veces menos») en un problema de proporción simple, resulta ser la situación más difícil de la experiencia. Incluso los niños más mayores no alcanzan el 50% de aciertos.

En cuanto al análisis de los procedimientos de éxito, el tratamiento masivamente utilizado, independientemente del nivel escolar del alumno, es el «canónico»: el niño reconoce desde un principio que la situación requiere una o dos operaciones de división (según el tipo de problema). No obstante, este procedimiento desaparece progresivamente cuando la dificultad de la estructura multiplicativa y el número de operaciones a efectuar aumentan. Dicho de otro modo, este tipo de conducta únicamente es masivo cuando se trata de realizar una sola operación de división. Hemos encontrado 44 y 47 sujetos sobre un total de 57 que utilizan la operación de división para resolver los problemas de la tercera experiencia, P2.1 y P2.2, respectivamente.

En segundo lugar, el procedimiento más utilizado aunque con una frecuencia bastante más inferior al precedente, es el que denominamos «hipotético de carácter multiplicativo»: el alumno, en función del fin perseguido, hace una estimación sobre el cociente, que irá probando mediante ensayos sucesivos hasta aproximarle al «todo». Por ejemplo, ante el P2.1 Jean-Christophe (13,5 años; CM2) realiza las siguientes multiplicaciones *à trou* (con agujero):

$$15 \times 10 = 150$$
$$15 \times 9 = 135$$
$$15 \times 8 = 120$$

Explicación del chico: «no, esto no pueden ser 10 caramelos en un cucurucho porque hay menos... Hay 8 caramelos en cada cucurucho, porque 10 es demasiado grande, 9 también, 8 no porque 8 por 15=120».

La fuerte presencia de estos dos procedimientos nos lleva a pensar en un efecto considerable del modelo metemático enseñado en la escuela francesa.

De forma mucho menos estable, observamos otros dos tipos de procedimientos de acierto: el «aditivo» (consiste en sumar un cierto número de veces el divisor, haciendo balances parciales para ir ajustando hasta llegar al fin deseado: el «total») y el «mixto-intermediario» (combinación de una multiplicación y una división).

En cuanto a los procedimientos de fracaso observados en esta última experiencia, nos encontramos de nuevo que la interpretación errónea de la relación escalar es la más extendida. Un 49% del total de sujetos de la muestra interpreta de forma sustractiva («3 de menos») la expresión: «3 veces menos». Con la edad esta expresión sigue presentando dificultades, ya que un 41% de los alumnos de CM2 la utilizan erróneamente.

Entre la cantidad de alumnos que interpretan incorrectamente las expresiones: «3 veces más» y «3 veces menos», constatamos una diferencia de un 20% más de sujetos que utilizan la segunda expresión equivocadamente.

Por otro lado, percibimos que la elección de una operación inadecuada es un error relativamente frecuente. Ello nos lleva a pensar que el niño de 8 a 11 años duda en expresar las relaciones lógicas por medio de operaciones aritméticas. Así por ejemplo, para encontrar el valor unitario (número de caramelos en un cucurucho) cuando se dispone de 120 caramelos y de 15 cucuruchos para meterlos, Christelle (11 años; CM2) busca un sistema sustractivo para la partición realizando una serie de restas sucesivas hasta no sobrarle nada y, finalmente contará el número de restas necesarias para llegar al fin deseado; evitará dividir 120 entre 15, operación que exige un comienzo de reversibilidad en el plan operatorio.

Debemos también señalar que en la práctica nos encontramos con al menos cuatro sujetos que se ven obligados a efectuar las cuatro operaciones aritméticas para deducir la «buena respuesta» a partir de los resultados hallados.

Sin embargo, el tipo de error más extendido es el olvido de un dato. De ahí que constatemos que, el hecho de aumentar la complejidad de la estructura multiplicativa en juego y, sobre todo, de aumentar el número de informaciones, complique enormemente la tarea. No obstante, este error tiende a desaparecer en niños más mayores (10-11 años), a excepción de las situaciones P2.3 (47%) y P2.4 (35%).

Durante una observación más fina, hemos comprobado que el olvido de una información se da casi siempre en el número de niños en juego. Por el contrario, nuestros sujetos no olvidan nunca el factor «tiempo» (días, semanas,...).

Conclusión

Únicamente señalaremos los aspectos que nos parecen más relevantes.

En esta investigación hemos comprobado, a pesar de haber elaborado las situaciones-problemas en las condiciones cognitivas más simples (cf. variables de la situación, variables de orden numérico,...), la existencia de dificultades considerables, especialmente, en las situaciones de proporcionalidad doble y división.

Como ya señalábamos, la diferencia de dificultad relativa a las estructuras multiplicativas de proporción simple y doble es más evidente en la última de las experiencias presentadas. Así, observamos que existe un «salto» considerable entre la estructura multiplicativa de proporción doble o múltiple y la estructura de proporción simple, especialmente cuando otros factores entran en juego (necesidad de operaciones de división, la introducción de un operador «escalar»).

Desde un *plano conceptual* los resultados indican que:

— la división es, evidentemente, una operación más difícil que la multiplicación, a pesar de la estructura multiplicativa subyacente;

— la relación de «función inversa» (P2.2) que se trata, como ya hemos señalado anteriormente, de la búsqueda de un valor x conociendo su imagen $f(x)$ y el valor unitario $f(1)$, es más compleja que la relación «escalar» (P2.1), donde se debe buscar el valor unitario conociendo $x \rightarrow f(x)$.

— las propiedades de la función bi-lineal son peor asimiladas (o adquiridas) por nuestros sujetos que las propiedades de la función lineal.

Desde un *plano lingüístico*, las expresiones escalares: «3 veces más» y «3 veces menos» desencadenan confusiones notables, sobre todo, «3 veces menos». No es imposible que el alumno se limite a una interpretación cualitativa de la expresión, significando únicamente el «menos» sin el conocimiento de la relación cuantitativa y/o la operación aritmética que ésta implica. Puede ser que esta ambigüedad no desaparezca hasta una edad más avanzada, en el momento en que el concepto de «relación» se comprende mejor, incluso en el plano formal.

Desde un *plano operatorio*, los protocolos recogidos muestran, además, que se manifiestan dificultades no sólo por razones conceptuales referentes al tipo de relación sino también por la imposibilidad de manejar «correctamente» el conjunto de las informaciones-datos. Hemos notado, principalmente en las situaciones de división con estructura de proporcionalidad doble, que el olvido de un dato es el error más frecuente. Así también, la búsqueda de una información intermediaria «necesaria» conlleva mayores dificultades en el caso de la división que en el de la multiplicación.

Resumen

La proporcionalidad es considerada a menudo por los profesores de matemáticas como una de las nociones más importantes en la enseñanza obligatoria pero, al mismo tiempo, como una de las que supone mayores dificultades. Este artículo tiene por objetivo principal la exploración del efecto de dos clases de «estructuras multiplicativas» (proporción simple y proporción doble) subyacentes en diferentes tipos de «situaciones-problemas» que implican una o varias operaciones de multiplicación y/o de división. Y ello, desde un punto de vista psicológico y didáctico.

Los procedimientos utilizados por niños de 8 a 11 años en la resolución de los problemas propuestos serán analizados, principalmente, desde tres ángulos: conceptual, lingüístico y operativo, con el fin de determinar qué dificultades se manifiestan en el proceso de adquisición de esta noción.

Summary

Proportionality is often considered by math teachers as one of the most important notions in obligatory teaching and also as one of the most difficult. The purpose of this paper is to explore the effect of two types of «multiplicative structures» (simple and double proportionality) underlying in different types of «problem situations» which imply one or several multiplication and/or division operations. And this from a psychologic and didactic point of view.

The procedures employed by children from ages 8 to 11 in resolving the proposed problems will be analyzed mainly from three angles: conceptual, lin-

guistic and operative, in order to determine which difficulties arise in the process of acquisition of this notion.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Audiger M.; Colomb, J.; Guillaume J.C. y Richard F. (1982). *Recherche d'information et planification dans la résolution de problèmes à l'école élémentaire.* Informe de investigación publicado por el I.N.R.P. del Ministerio de la Educación. Paris.

Coll, C. (1981. *Psicología Genética y Educación.* Barcelona: Ed. Oikos-tau.

Dupuis, C. y Pluvinage F. (1981). *La proportionnalité et son utilisation.* Vol. 2.2, 165-212, en Recherche en Didactique des Mathématiques. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage.

Ferrandez-Reinisch, A.M. (1983). *L'élaboration de la notion de proportion inverse dans l'épreuve de l'équilibre de la balance.* L'Année Psychologique. 505-512. Paris.

Ferrandez-Reinisch, A.M. (1985). The acquisition of inverse proportionnality: a training experiment. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 16, 2. Academic Press.

Gilis, D. y Vauday, J. (1982). *Evaluation des performances des élèves en situation de résolution de problèmes.* Informe de investigación, publ. del I.N.R.P. Ministerio de la Educación. Paris.

Gómez, C. (1981). Procesos cognitivos en el aprendizaje de la multiplicación. *Infancia y Aprendizaje, 15,* 109-119.

Julo, J. (1982). *Adquisition de la proportionnalité et résolution de problèmes.* Thèse de Doctorat. Université Paris VIII.

López, A. (1984). *La construcción del número fraccionario y su relación con la proporcionalidad.* Actas del 1r Congreso de Colegios Oficiales de Psicólogos. Madrid.

Moreno, M. y Sastre, G. (1980). *Aprendizaje y desarrollo intelectual.* Barcelona: Gedisa.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. *Educational Studies in Mathematics, 11-2,* 217-253.

Noelting, G. y Gagne L. (1980). *A learning hierarchy for ratios and fractions,* In Procedings of the Forth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Berkeley.

Piaget, J. (1974). *Réussir et comprendre.* Paris: P.U.F.

Rogalski, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. *Bulletin A.P.M.E.P. 320,* 563-584.

Sastre, G. y Moreno, M. (1980). *Descubrimiento y construcción de conocimientos.* Barcelona: Gedisa.

Vergnaud, G. (1977). Activité et connaissance opératoire. *Bulletin A.P.M.E.P. 307,* 52-65.

Vergnaud, G. y Ricco, G. (1977). Psychogénèse et programme d'enseignement: différents aspects de la notion de hiérarchie. *Bulletin de Psychologie, 330,* XXX, 877-882.

Vergnaud, G.; Rouchier, A.; Ricco, G. y Marthe, P. (1979). *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré.* I.R.E.M. d'Orléans et E.H.E.S.S. *2,* Paros.

Vergnaud, G. (1981a). *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en Didactique des Mathématiques.* Vol. 2.2, 215-219, In Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1981b). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne-Francfort: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures.* In Lesch R., Landau, M. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press.

ANEXOS

Anexo I: enunciados y gráficos de las situaciones-problemas presentadas:

	multiplicación	*división*
A) Proporción simple:		
— isomorfismo de medidas	P1.1. P1.2	P2.1. P2.2. P2.5
— proporción simple compuesta	P1.3. P1.4	
B) Proporción doble:	P1.5. P1.6	P2.3. P2.4

Experiencia I:

P1.1 Eric compra *8 caramelos*
El precio de un caramelo es de *3 francos.*
¿Cuánto debe pagar?

1	a (3)
b (8)	$\boxed{?}$

P1.2 Jean-Claude compra *6 chocolatinas.*
El precio de una chocolatina es de *4 francos.*
Su amigo Gilles compra *3 veces más chocolatinas* que Jean-Claude.
¿Cuánto deberá pagar Gilles?

	1	a (4)
	b (6)	x
x3		
	s	$\boxed{?}$

P1.3 La secretaria de M. Duclos compra *4 cajas de bolígrafos.*
Cada caja contiene *6 bolis.*
El precio de un boli es de *3 francos.*
¿Cuánto deberá pagar?

1	a (6)	x
	1	b (3)
c (4)	y	$\boxed{?}$

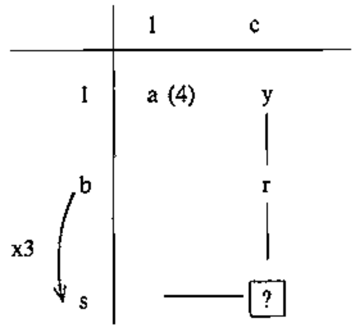
P1.4 Una maestra compra en el mes de septiembre *5 paquetes de lápices* para su clase.
Cada paquete contiene *6 lápices.*
El precio de un lápiz es de *4 francos.*
El mes de enero compra *3 veces más paquetes.*
¿Cuánto deberá pagar en el mes de enero?

	1	a (6)	x
	1	b (4)	
	c (5)	y	r
x3			
	s	t	$\boxed{?}$

P1.5 Mme Vincent tiene una pequeña granja con *4 cabras.*
Una cabra produce *3 litros de leche por día.*
¿Cuántos litros de leche producirán las cabras en *7 días?*

	1	c
1	a (3)	y
b (4)	x	$\boxed{?}$

P1.6 M. Gilbert tiene un establo con *6 ovejas*
Con la leche de una oveja puede hacer *4 quesitos por día.*
Su vecino M. Pascal tiene *3 veces más ovejas* y hace también 4 quesos por día con la leche de una oveja.
¿Cuántos quesos hará M. Pascal en *7 días* con todas sus ovejas?



Experiencia II:

P1.3' Sophie compra *4 cajas de bolis.*
El precio de un boli es de *3 francos.*
Una caja contiene *6 bolis.*
¿Cuánto debe pagar?

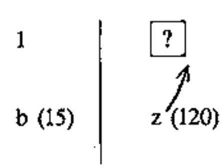
P1.4' Denise compra en el mes de febrero
5 paquetes de lápices para su oficina.
El precio de un lápiz es de *4 francos.*
En el mes de mayo compra *3 veces más paquetes.*
¿Cuánto deberá pagar en el mes de mayo?

P1.5' Mme Bernard tiene una pequeña granja con *4 cabras.*
Recoge la leche durante *7 días.*
Una cabra produce *3 litros de leche por día.*
¿Cuántos litros de leche recoge en *7 días?*

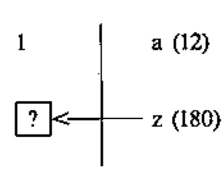
Nota: Los datos en cursiva fueron indicados en color rojo sobre las fichas presentadas a los niños.

Experiencia III:

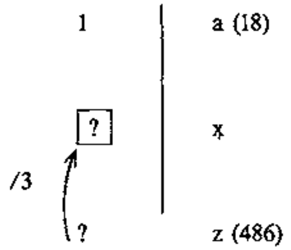
P2.1 En una fiesta de aniversario los niños disponen de 120 caramelos.
Los ponen en 15 cucuruchos de manera que cada cucurucho contenga el mismo número de caramelos.
¿Cuántos caramelos habrá en cada cucurucho?



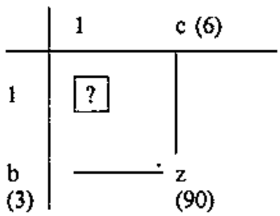
P2.2 Una granjera ha recogido 180 huevos.
Los coloca en cajas, pudiendo contener cada una 12 huevos.
¿Cuántas cajas llenará?



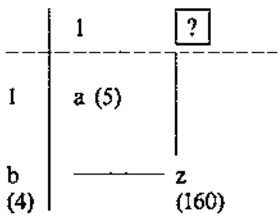
P2.5 Para ganar dinero dos amigas,
Bernadette y Nicole, fabrican collares.
Venden sus collares a 18 francos cada uno.
Bernadette gana así 486 francos.
Nicole fabrica 3 veces menos
collares que Bernadette.
¿Cuántos collares ha hecho Nicole?



P2.3 Tres hermanos: Alain, Robert y André
quieren comprar un regalo de 90 francos
para el día de la madre.
Pueden ahorrar su dinero durante 6 semanas.
¿Cuánto deberá ahorrar cada uno de
los tres hermanos?



P2.4 Cuatro primos, Bruno, Anne, Fréderic
y Hélene, quieren hacer un regalo de
160 francos a su abuela.
Cada uno de ellos ahorra 5 francos por día.
¿Durante cuánto tiempo los 4 primos
deberán ahorrar su dinero?



Anexo II: cuadros de los resultados obtenidos en las experiencias.

CUADRO I. EFECTIVOS Y PORCENTAJES DE ACIERTO EN LOS PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

Problema / Nivel escolar	Proporc. simple P1.1	P1.2	Proporc. simple «compuesta» P1.3	P1.4	Proporc. doble P1.5	P1.6
CE2 (8/9 a.) N = 8	6 (75%)	3 (37%)	3 (37%)	1 (12%)	4 (50%)	0 (0%)
CM1 11 (9/10 a) N = 16	9 (68%)	12 (56%)	11 (75%)	10 (68%)	7 (62%)	(43%)
CM2 20 (10/11 a) N = 20	18 (100%)	18 (90%)	16 (90%)	20 (80%)	12 (100%)	(70%)
Totales N = 44	37 (84%)	30 (68%)	33 (75%)	28 (63%)	34 (77%)	21 (47%)

CUADRO 2. EFECTIVOS Y PORCENTAJES DE ACIERTO EN LOS PROBLEMAS DE DIVISIÓN

Problema Nivel escolar	Proporción simple P2.1	 P2.2	 P2.5	Proporción doble P2.3	 P2.4
CE2 (8/9 años) N = 10	10 100%)	7 (70%)	1 (10%)	1 (10%)	1 (10%)
CM1 (9/10 años) N = 23	20 (86%)	19 (82%)	3 (13%)	5 (21%)	3 (13%)
CM2 (10/11 años) N = 24	24 (100%)	23 (96%)	11 (46%)	11 (46%)	10 (41%)
Totales N = 57	54 (94%)	49 (86%)	15 (26%)	17 (28%)	14 (25%)