ANUARIO DE PSICOLOGÍA
Núm. 25 - 1981 (2)

USO DE LOS MODELOS DE «SERIES TEMPORALES» COMO TECNICA DE ANALISIS DE LOS DISEÑOS CONDUCTUALES

J. ARNAU

Departamento de Psicología Experimental
Universidad de Barcelona

Jaume Arnau
Departamento de Psicología Experimental
Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación
Avda. de Chile, s/n.
Barcelona-28.

1. *Consideración general.*

Uno de los diseños que recientemente se ha incorporado tanto en investigación psicológica como educativa y que permite de alguna forma estudiar, experimentalmente, las variables conductuales desde una perspectiva histórica ha recibido una gran variedad de nombres tales como Diseños intensivos (Chassan, 1967), Diseños de $N = 1$ (Davidson y Costello, 1969), Diseños de caso único (Shapiro, 1966; Hersen y Barkow, 1976), Diseño de replicación intra-sujeto (Gentile, Roden y Klein, 1972). La característica fundamental de este tipo de diseños es, precisamente, su naturaleza temporal. Existen muchas situaciones en las que se toman, de una misma variable dependiente, una serie de N observaciones ordenadas en el tiempo. Estas observaciones, de carácter cronológico, generan una serie de datos, Z, que suelen tomar la siguiente forma: $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_t$.

Partiendo de esta estructura básica, supongamos que nos interesa probar la efectividad de un determinado tratamiento. A tal efecto, se introduce el tratamiento o intervención, I, en un punto concreto de la serie y, a continuación se pasa a valorar su posible efectividad sobre la sucesiva secuencia de observaciones. Se espera, por tanto, que como consecuencia de la intervención o aplicación del tratamiento la serie temporal experimente un cambio ya sea de nivel o dirección, de carácter tanto progresivo como retardado. Este es, en suma, el paradigma básico que en investigación educativa y psicológica ha venido llamándose «diseño de series temporales interrumpidas» (Campbell y Stanley, 1963; Hartmann y otros, 1980).

Con esta caracterización básica que se ha hecho del «diseño de series temporales interrumpidas», queda patente la analogía que puede darse entre estos diseños y los diseños conductuales en los que, generalmente, se utiliza un solo sujeto y del que se toman una serie de medidas repetidas. De ahí el gran interés que han suscitado, recientemente, los modelos estadísticos de series temporales, dado que permiten un análisis mucho más preciso de los resultados experimentales obtenidos a partir de diseños de tipo conductual. Era urgente contar con estos instrumentos de análisis, sobre todo en investigación conductual y psicoterapéutica, ya que hasta hace poco toda inferencia se basaba en la propia habilidad interpretativa del experimentador. Gracias, pues, a los modelos estadísticos de series temporales, la investigación psicológica y educativa cuenta en la actualidad con una poderosa técnica de análisis que posibilita la ejecución de diseños de un solo sujeto o investigaciones de carácter longitudinal.

2. *Problemas básicos que plantea el análisis estadístico de los Diseños conductuales.*

Uno de los principales problemas que plantean los Diseños conductuales cuando se pretende estimar el efecto de un tratamiento (o intervención) utilizando, para ello, las técnicas de análisis estadísticos convencionales, es la presencia de dependencia entre los diferentes datos u observaciones. Este tipo de dependencia es conocida con el nombre de «dependencia serial» y constituye uno de los componentes más importantes de la serie temporal. Como señalan McCain y McCleary (1979), «los modelos de series temporales tienen dos componentes». Un primer componente *determinista* que refleja efectos que persisten a lo largo de un determinado período y un componente *estocástico* que constituye el error o ruido blanco del modelo. El componente determinista es representado por todos aquellos parámetros del modelo que no dependen de la estructura del error. Este componente incluye todos los parámetros que actúan de forma sistemática a lo largo de la serie o de un segmento de la misma. Así, dicho componente incluye la media del proceso, cuyo efecto se mantiene constante a lo largo del proceso, y el efecto del tratamiento, que se mantiene constante sólo para aquellas fases en que se ha aplicado el tratamiento. De acuerdo con Hartmann y otros (1980), el componente determinista de un proceso de serie temporal es análogo al componente, del análisis de la varianza, que recoge los efectos del tratamiento.

El segundo componente del modelo, el componente estocástico, no es similar al componente de error del análisis de la varianza. En efecto, el componente estocástico de la serie temporal puede ser descompuesto en dos elementos o partes: Una primera parte que es sistemática y una segunda parte no sistemática. La parte sistemática refleja el efecto de los previos errores aleatorios sobre la observación o dato actual. La parte sistemática es responsable de la autocorrelación de la serie o dependencia serial, siendo uno de los principales objetivos del análisis estadístico descubrir la «estructura» de esta parte sistemática del componente estocástico. La parte no sistemática del componente estocástico, es aquella parte completamente aleatoria que no es tenida en cuenta en el modelo. Por tanto, los modelos de series temporales describen, fundamentalmente, la estructura sistemática del componente de error, al tener en cuenta la naturaleza y carácter de dicho componente. El hecho de que los modelos de series temporales incorporan en su estructura la posible relación entre los componentes de error, convierte a este tipo de análisis en una poderosa herramienta aplicable a datos generados por un mismo individuo y que, por presuposición, debe existir un determinado tipo de dependencia serial entre los mismos.

No siempre la dependencia serial o relación que se da entre los componentes de error de las diferentes observaciones de la serie siguen el mismo proceso y tiene la misma estructura. De ahí la necesidad de examinar la estructura de esta dependencia y ello se consigue mediante el cálculo de la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial.

En el hipotético supuesto de que una serie cronológica de observaciones no presente dependencia alguna, existe un procedimiento gráfico muy simple para estimar el efecto de la intervención. Esta sencilla prueba de significación elaborada por Shewart (1931) consiste en establecer dos bandas de desviación estándar entorno al nivel medio de la serie. Si la serie sobrepasa, en alguno de sus puntos dichas bandas, esto quiere decir que la serie presenta un cambio significativo, en dicho punto, en relación a su nivel medio.

Difícilmente dicho supuesto se cumple en las series de datos obtenidos de los Diseños conductuales y, en consecuencia, toda aplicación de esta prueba estadística requiere o que se ignore la presencia de la autocorrelación o que se asuma su no existencia. Es evidente, por otra parte, que los datos generados por un mismo sujeto presenten un determinado grado de dependencia. De ahí que, el análisis propuesto por Shewart (1931) deba ser rechazado en la mayoría de casos.

Las alternativas de análisis estadísticos de los Diseños conductuales han seguido dos orientaciones. Por un lado se ha utilizado la técnica de ajuste de curva mediante el análisis de tendencias y por otro, se han aplicado las pruebas estadísticas clásicas como la t y F. En ambos casos siempre se plantean dos problemas básicos: 1) Que los residuales no se distribuyan al azar y 2) Que las observaciones repetidas no sean muestras independientes de una variable aleatoria.

En muchos diseños conductuales se ha utilizado, para su análisis, la prueba t. A tal efecto se han obtenido las medias de las observaciones de la fase de línea base y la fase de tratamiento y se ha aplicado una prueba de comparación de medias, partiendo del supuesto que tales datos presentan poca dependencia entre sí.

En otros casos, se han propuesto variaciones de las pruebas t y F, para el análisis estadístico de estos diseños. Estas variaciones, como es lógico, difieren, fundamentalmente, en la forma de manejar la violación del supuesto de independencia de los datos. Así, para Shine y Bower (1971), se puede aplicar el correspondiente AVAR unidireccional de medidas repetidas a los diseños de caso único, con la única salvedad de que en lugar de utilizar un grupo de sujetos de los que se toma una sola medida, a través de los diferentes niveles del factor experimental, se utiliza un solo sujeto del que se toman varias medidas bajo cada uno de los niveles de dicho factor.

El supuesto más importante que asumen Shine y Bower (1971) consiste en considerar al sujeto como «un generador de respuestas» y que dichas respuestas son estadísticamente independientes y que se distribuyen normalmente en torno a un valor central de respuesta. También, Gentile, Roden y Klein (1972), parten de un supuesto según el cual la ejecución de una determinada respuesta por parte de un sujeto es independiente de las restantes. Con ello se pretende justificar la utilización del AVAR como prueba de análisis estadístico. No obstante, tanto en un caso como en otro es decir, ya sea considerando el diseño de caso único como una variación del Diseño clásico «tratamiento × sujetos» (Shine y Bower, 1971), o combinando los puntajes de las diferentes fases —por ejemplo, dos fases de línea base y dos fases de tratamiento (Gentile y otros, 1972)— no se resuelve el principal problema que plantea la dependencia serial en este tipo de diseños. Como señala Kazdin (1976), aunque se combinen las fases la dependencia sigue existiendo. No queda claro, por tanto, añade Kazdin (1976), que las variaciones del AVAR pueden soslayar el problema de la dependencia serial con lo que dicha prueba estadística se convierte en un procedimiento débil y poco potente.

3. *Los modelos estadísticos de series temporales como alternativa a las pruebas convencionales.*

La solución propuesta por Glass (1972), Glass, Willson y Gottman (1975), Gottman y Glass (1978), consiste en la utilización de los modelos de series temporales desarrollados por Box y Jenkins (1970), que permiten extraer de la serie original la dependencia existente entre los datos y trabajar con residuales libres de toda dependencia. Evidentemente la solución propuesta por Glass y otros (1975), es una solución al problema de la auto-correlación.

Uno de los modelos básicos que pueden ser aplicados a los datos de diseños conductuales o diseños de caso único recibe el nombre genérico de modelo ARIMA —autorregresivo integrado de medias móviles— que, como hemos indicado, ha sido desarrollado por Box y Jenkins (1970), y es utilizado para analizar datos de variables discretas.

Previamente a la descripción detallada del modelo ARIMA analizaremos sucintamente, las diferentes formas de variación que suelen presentarse en las series temporales. Una primera forma de variación es conocida como «variación cíclica» y suele, por lo general, producirse dentro de unos períodos fijos. Esta variación es especialmente importante en los diseños conductuales dado que puede confundir el efecto de una intervención o tratamiento experimental (Hersen y Barlow, 1976). Una segunda forma de variación es la «tendencia» definida como «un cambio de la media a largo plazo» (Chatfield, 1975). Estas dos variaciones, de carácter sistemático, son quizá las más comunes dentro del ámbito de la investigación conductual y deberán ser eliminadas cuando se pretende inferir consecuencias sobre la efectividad de los tratamientos. Un tercer tipo de variación son las fluctuaciones irregulares conocidas como residuales que pueden ser aleatorias o no. Estas variaciones residuales juegan un papel fundamental en el análisis de las series temporales.

Junto al concepto de variación, básico para la caracterización de la serie temporal, existe el concepto de «estacionariedad». Este concepto viene a ser análogo al de «estabilidad» que es utilizado, comúnmente, al hablar de los diseños conductuales. Una serie temporal es estacionaria si no presenta ningún tipo de variación regular o periódica (variación cíclica o de tendencia). Es por ello que uno de los propósitos básicos en la aplicación del modelo de series temporales es la extracción de cualquier variación de carácter sistemático a fin de que aquellas puedan ser correctamente descritas o representadas.

Si bien el concepto de «estacionariedad» y «no-estacionariedad» constituye una propiedad básica de la serie temporal, la presencia de un componente aleatorio y estocástico en su estructura es otro de los atributos fundamentales. «Las series temporales son, por tanto, procesos estocásticos y como tales pueden ser descritas como fenómenos estadísticos que evolucionan con el tiempo de acuerdo con las leyes probabilísticas» (Chatfield, 1975). Puesto que se ha descrito la «serie temporal» como un proceso estocástico se puede, en consecuencia, afirmar que es un conjunto de variables aleatorias que se ordenan con el tiempo. Así pues, para un solo resultado del proceso únicamente se tiene en cuenta una observación de cada variable aleatoria y los valores de estas observaciones varían, a lo largo del tiempo, de acuerdo con las leyes probabilísticas.

4. *Series temporales estacionarias.*

Una serie temporal estacionaria se caracteriza por la ausencia de variación sistemática y mantiene la misma estructura de probabilidad a lo largo de su historia. Gottman (1973), define la serie estacionaria como aquella que varía en torno a una media fija. Esto significa que el grado de dependencia de la serie no variará con el tiempo y se mantendrá consistente a través del tiempo.

Los dos modelos estocásticos de series temporales más ampliamente utilizados son el Auto-regresivo (AR) y el de Medias-móviles (MA). Supongamos que se tiene un conjunto de observaciones, $Z_1 \ldots Z_t$, de un proceso de serie temporal. Un modelo AR describe una clase particular de proceso en que las observaciones actuales, t, son precedibles, en mayor o menor grado, de las observaciones u outputs previos. Por tanto, mediante el modelo Auto-regresivo se describe un proceso en que las observaciones actuales se hallan determinadas o influidas por las observaciones anteriores y toma la forma:

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \Phi_p Z_{t-p} + a_t$$

Esta representación describe un modelo AR de orden «p», AR(p). Como puede apreciarse su estructura es similar al modelo de regresión múltiple con la única diferencia de que el proceso autoregresivo Z_t no se realiza sobre variables independientes sino sobre valores pasados propios. El valor actual de Z_t es, por tanto, expresado «como una suma ponderada de valores pretéritos más un componente aleatorio o de error». En este modelo se encuentran una serie de coeficientes «Φ» que recoge el peso de la influencia que sobre la observación actual ejercen los resultados pasados y tiende a disminuir a medida que éstos se hallen más alejados. Así, la relación que mantienen estos coeficientes o pesos queda representada por:

$$1 > \Phi_1 > \Phi_2 > \ldots > \Phi_p.$$

El caso más simple de proceso autoregresivo es el descrito por el modelo AR(1) o de primer orden, cuya expresión es:

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

(donde «Φ_1» es el coeficiente autoregresivo y «a_t» es el componente aleatorio del que se asume una media igual a cero y una varianza constante). A fin de simplificar dicha representación se puede utilizar el «operador de retroceso», simbolizado por B y que sirve para transformar la observación actual, Z_t, en observaciones anteriores como Z_{t-1}, Z_{t-2}, etc. De esta forma se tiene que:

$$BZ_t = Z_{t-1};\ B^2Z_t = Zt_{-2};\ B^3Z_t = Z_{t-3}, \ldots, B^pZt = Z_{t-p}.$$

Aplicando el «operador de retroceso», B, a la representación del Modelo AR(1), anteriormente descrito se tiene:

AR(1): $(1 - \Phi_1 B)Z_t = a_t$ que es equivalente a $Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + a_t$.

Un segundo modelo que permite una descripción de un proceso de serie temporal estacionario es el Modelo de Medias-móviles. Este modelo describe un proceso en que la observación actual no sólo depende del input o impulso aleatorio que actúa en este momento, a_t —que constituye la fuerza conductora del proceso—, sino también, aunque en menor proporción de los impulsos pasados. Con ello se puede representar el modelo por:

$$Z_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2} - \ldots - \vartheta_q a_{t-q}.$$

Esta ecuación describe un modelo general MA de orden «q», MA(q). También, en relación a este modelo puede afirmarse que los inputs o impulsos del sistema tienden a decrecer en fuerza a medida que se retrotraen en el tiempo. El peso de su relativo efecto viene recogido por el parámetro «ϑ» el cual mantiene la siguiente relación:

$$1 > \vartheta_1 > \vartheta_2 > \ldots > \vartheta_q.$$

Una representación de un modelo de Medias-móviles de primer orden, MA(1), viene dado por la expresión:

$$Z_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1}.$$

Aplicando a dicha expresión el operador de retroceso queda convertida en:
MA(1): $Z_t = (1 - \vartheta_1 B)a_t$ que es equivalente a $Z_t = a_t - \vartheta_1 a_{t-1}$.

El operador de retroceso, B, sirve exclusivamente para simplificar la notación de los modelos.

Cabe señalar, por otra parte, que en la descripción de los modelos generales de series temporales estacionarias que se han presentado se ha partido del supuesto que el nivel medio de la serie o media es igual a cero. Sin embargo, para los procesos en que $\bar{Z} \neq 0$ se utiliza, por acuerdo básico, el valor transformado; es decir, $z_t = Z_t - \bar{Z}$. En la representación de los modelos subsiguientes se utilizarán valores de desviaciones y no datos directos.

5. *Series temporales no-estacionarias.*

Junto a los modelos de procesos de series temporales estacionarias cabe señalar los modelos no-estacionarios desarrollados por Box y Jenkins (1970), cuya forma más general es conocida con el nombre de Modelo Autoregresivo Integrado de Medias Móviles (ARIMA). Hay que tener en cuenta que, en la práctica, la mayoría de procesos de series temporales son no estacionarios, lo cual implica que los efectos de los diferentes impulsos tienden a acumularse o integrarse a través del tiempo. Esta acción sumativa de los impulsos aleatorios puede introducir en la serie cambios de carácter sistemático y tendencias. Un procedimiento para extraer de la serie cualquier fuente de no-estacionariedad es la diferenciación a cuyo efecto deberemos aplicar el operador de diferencia, ∇, que viene definido por:

$$\nabla Z_{t+1} = Z_{t+1} - Z_t$$

En este caso se habrá obtenido una diferenciación de primer orden. Diferenciación que, como señalan Box y Jenkins (1970), suele ser suficiente, con datos no cíclicos, para conseguir la estacionariedad de la serie. Consideremos, por ejemplo, una serie cuyos valores sean 1, 3, 5, 7, 9 y 11. Estos valores, como es obvio, presentan una tendencia lineal. Aplicando el operador de diferencia a la serie se consigue eliminar la tendencia. Así, para el ejemplo propuesto se tiene:

$$(3 - 1) = 2;\ (5 - 3) = 2;\ (7 - 5) = 2;\ (9 - 7) = 2 \text{ y } (11 - 9) = 2$$

De esta forma se obtiene una serie estacionaria de N-1 valores. En el supuesto que la serie describa una tendencia cuadrática, como por ejemplo, 1, 4, 9, 16, 25 y 36, se aplicará una diferenciación de segundo orden. Lo que implica diferenciar la serie a partir de la original y volver a diferenciarla en base a la que se ha obtenido. En la diferenciación de segundo orden, aplicaremos el operador ∇^2,

$$\nabla^2 Z_{t+2} = \nabla Z_{t+2} - \nabla Z_{t+1} = Z_{t+2} - 2Z_{t+1} + Z_t$$

Con los datos propuestos se tiene:

$(9 - 2 \times 4 + 1) = 2$; $(16 - 2 \times 9 + 4) = 2$; $(25 - 2 \times 16 + 9) = 2$ y $(36 - 2 \times 25 + 16) = 2$.

Este mismo resultado se obtiene aplicando una doble diferenciación a los datos. Así, en una primera diferenciación se tiene:

$(4 - 1) = 3$; $(9 - 4) = 5$; $(16 - 9) = 7$; $(25 - 16) = 9$ y $(36 - 25) = 11$.

La primera diferenciación convierte la serie original en 3, 5, 7, 9 y 11, con lo cual se ha eliminado de la misma la tendencia cuadrática. La segunda diferenciación extrae de la misma la tendencia lineal transformándola en:

$(5 - 3) = 2$; $(7 - 5) = 2$; $(9 - 7) = 2$ y $(11 - 9) = 2$.

En este ejemplo, la serie resultante posee N-2 valores.

Se puede, por tanto, concluir que una serie temporal no-estacionaria puede alcanzar un estadio de estacionariedad mediante sucesivas diferenciaciones. Es decir, aplicando sucesivas veces el operador de diferencia hasta que el residual sea estacionario. Generalmente, el grado de diferenciación de la serie, representado por «d», no suele ser superior a dos para que ésta se convierta en estacionaria. El símbolo «d» representa, como se ha indicado, la cantidad de diferenciaciones necesarias para convertir la serie en estacionaria. Otros aspectos básicos del Modelo ARIMA (p,d,q) desarrollado por Box y Jenkins quedan resumidos en los siguientes presupuestos básicos (McCleary y Hay, 1980):

1. El determinante más importante de cualquier observación, z_t u output del sistema, es a_t o el input del mismo. Al mismo tiempo a_t queda definido como un impulso aleatorio o fuerza conductora del sistema.
2. En menor grado la observación actual Z_t puede quedar afectada por el impulso previo a_{t-1}.
3. También y en menor proporción, Z_t puede estar influida por la observación anterior o Z_{t-1}. Es decir, por el resultado previo del proceso.
4. En mucha menor proporción, la observación actual puede estar afectada por inputs y outputs más lejanos o distantes en el tiempo, como por ejemplo, por a_{t-2}, Z_{t-2}; a_{t-3}, Z_{t-3}, etc.

A partir de estos supuestos básicos el modelo general ARIMA toma la siguiente expresión:

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + a_t - \vartheta_1 a_{t-1} - \vartheta_2 a_{t-2}$$

(se han omitido del modelo los términos z_{t-3} y a_{t-3}, dado que por lo general suelen tener escasa incidencia en la mayoría de procesos temporales. Las observaciones se han presentado en términos de sus desviaciones).

Se puede en consecuencia afirmar que un Modelo de serie temporal ARIMA (p,d,q), es una expresión que permite describir una serie de observaciones después de que éstas hayan sido diferenciadas «d» veces a fin de extraer las posibles fuentes de no estacionariedad.

Los pasos más importantes que han de seguirse con objeto de aplicar el análisis de series temporales a experimentos conductuales son fundamentalmente tres. En primer lugar, debe identificarse el adecuado modelo ARIMA (p,d,q) que mejor se ajuste a la estructura básica de los datos experimentales. Una vez identificado el modelo, deben estimarse los parámetros del mismo. Por último, debe ser utilizado para sacar inferencia acerca de la efectividad de los tratamiento o intervención.

6. *Identificación del Modelo ARIMA.*

La identificación del adecuado Modelo ARIMA requiere que se hallen los correspondientes valores de p, d y q. Uno de los procedimientos o técnicas que permiten determinar los valores de p, d y q, es la determinación del estadístico denominado «función de auto-correlación» (FAC). La FAC de un proceso de serie temporal viene definida por:

$$FAC(k) = COV(Z_t, Z_{t+k})/VAR(Z_t)$$

Supongamos que N constituye el total de observaciones de una serie temporal cuya ordenación por pares puede tomar la siguiente forma:

$$(Z_1, Z_2), (Z_2, Z_3), \ldots (Z_{N-1}, Z_N)$$

Fijémonos que, en esta ordenación, los datos se aparean en base a un solo retardo. De ahí que k, o valor del retardo, sea igual a 1. Ordenando los datos en función de la cantidad de retardos se tiene:

$$\begin{aligned} k &= 0 \quad (Z_1, Z_1), (Z_2, Z_2), \ldots, (Z_N, Z_N) \\ k &= 1 \quad (Z_1, Z_2), (Z_2, Z_3), \ldots, (Z_{N-1}, Z_N) \\ k &= 2 \quad (Z_1, Z_3), (Z_2, Z_4), \ldots, (Z_{N-2}, Z_N), \ldots \end{aligned}$$

Si bien mediante la aplicación de la ecuación de autocorrelación se pueden obtener los diferentes coeficientes para ordenamientos de pares de observaciones cada vez más distantes, en la práctica dichos coeficientes pueden calcularse mediante el siguiente procedimiento. En primer lugar se calcula el coeficiente de autocovarianza de la serie, COV(k), con la aplicación de la ecuación que a continuación transcribimos (Anderson, 1975).

$$COV(k) = \frac{1}{N} \Sigma (Z_t - \overline{Z}) (Z_{t+k} - \overline{Z})$$

donde COV(k) es el coeficiente de autocovarianza para un retardo «k». Calculados los diferentes coeficientes de autocovarianza, se aplica la ecuación siguiente para estimar el coeficiente de autocorrelación:

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{COV\ (k)}{COV\ (O)}$$

siendo

$$COV(O) = \frac{1}{N} \Sigma\ (Z_t - \overline{Z})\ (Z_t - \overline{Z})$$

Generalmente no suelen calcularse los coeficientes de autocorrelación para retardos de $k > N/4$. Es, también obvio, que la COV(k) no puede calcularse para $k > N\text{-}1$.

Hallados los coeficientes de autocorrelación para los distintos valores de k, éstos son llevados a un gráfico en que se representan en función de los retardos o k. Dicho gráfico recibe el nombre de correlograma y es utilizado para la identificación del modelo. El correlograma constituye, por tanto, una radiografía de la serie y permite revelar su estructura básica.

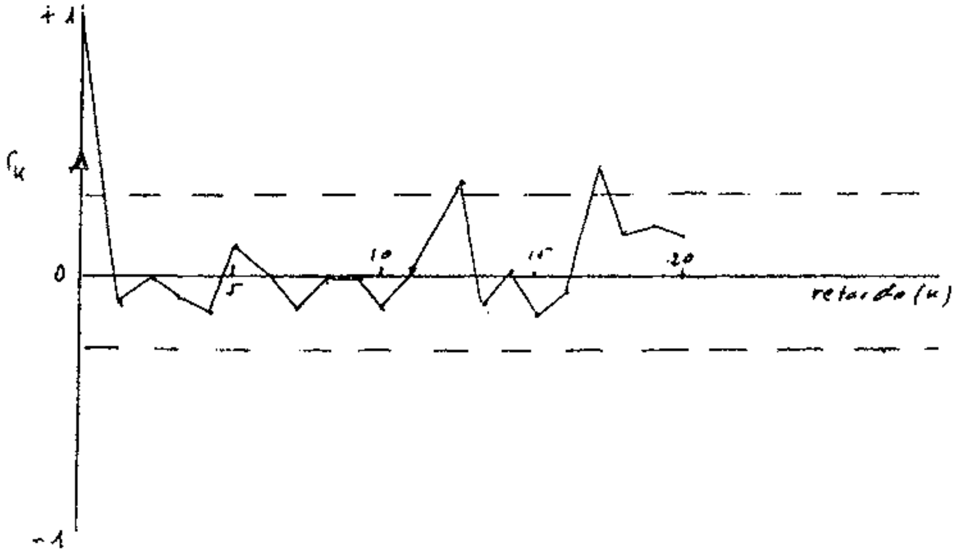

FIGURA 1

Correlograma de 100 observaciones independientes distribuidas normalmente.

Si todos los coeficientes de autocorrelación son cero para los distintos retardos, se puede inferir que el modelo que mejor se ajusta a la serie es el ARIMA (0,0,0). Si la FAC(1) es grande y positiva y las restantes funciones tienden a decaer lentamente de retardo en retardo se puede inferir que la serie es no-estacionaria y en consecuencia debe ser diferenciada. Si el coeficiente de autocorrelación para $k = 1$ es significativamente diferente de cero y a partir de retardos superiores a uno las FAC no son diferentes de cero, el modelo que mejor describe el proceso es el ARIMA (0,0,1). Por último, si los diferentes coeficientes de autocorrelación presentan un decaimiento exponencial a medida que aumentan los retardos, el proceso puede ser descrito por un modelo ARIMA(1,0,0).

No siempre la identificación del Modelo es tan clara, por lo que el analista suele utilizar un segundo estadístico de identificación: La «función de auto-correlación parcial» (FACP). Dicha función de autocorrelación parcial puede ser utilizada en aquellos casos en que es difícil distinguir en el correlograma entre un proceso generado por un ARIMA(0,0,q) y un proceso generado por un ARIMA(p,0,0).

El coeficiente de autocorrelación parcial es interpretado como cualquier medida de correlación parcial y, por tanto, como una medida de la correlación entre observaciones distantes en k valores, siendo controladas o mantenidas constantes las correlaciones de las distancias intermedias. Para el cálculo de los coeficientes de autocorrelación parcial no existe un procedimiento tan sencillo como en el caso de la autocorrelación, ya que para ello se utiliza el sistema de ecuaciones propuesto por Yule-Walker. Una vez halladas tanto las FAC(k) como las FACP(k), deben calcularse los límites o intervalos de confianza con objeto de inferir si los diferentes valores difieren significativamente de cero o no. Así, para la FAC, el error estándar, EE, puede estimarse a partir de la siguiente fórmula (Barlett, 1946).

$$\mathrm{EE}\,[\mathrm{FAC}(k)] = \sqrt{\frac{1}{N}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{k} r_i^2\right)}$$

Para la FACP, el error estándar se calcula por:

$$\mathrm{EE}\,[\mathrm{FACP}(k)] = \sqrt{1/N}$$

Tomando ± 2EE se obtienen los límites o bandas de confianza tanto para los coeficientes de autocorrelación como para los coeficientes de autocorrelación parcial del 95 %, de forma que aquellos valores que se hallan dentro de dichas bandas no difieren significativamente de cero.

```
 —1    —.8    —.6    —.4    —.2   0    .2    .4    .6    .8    +1
 ___________________________________________________________________

                              (       IXXXX) XXXXXXXX
                              (       IXXXXX)
                              (       IXXX   )
                              (       IXX    )
                              (       IX     )
                              (       I      )
                              (       I      )
                              (       I      )
                              (       I      )
                              (       I      )
                            —2EE          + 2EE
```

FIGURA 2
Coeficientes de autocorrelación de 1 a 10 retardos, con las bandas marcadas con dos errores estándar. Esta representación corresponde a un Modelo ARIMA(1,0,0).

Con las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial se dispone de un procedimiento idóneo para la identificación del correspondiente modelo ARIMA.

7. *Estimación de los parámetros del Modelo ARIMA.*

Generalmente el modelo de series temporales que se aplica a los experimentos conductuales en los que se toman datos de forma cronológica de un mismo sujeto, se utiliza para valorar en qué medida la introducción de un determinado tratamiento, I, produce un cambio brusco de nivel en la serie. Supongamos que una serie de observaciones o registros de conducta describen un proceso ARIMA(0,0,1). Dicho proceso queda representado por:

$$z_t = L - \vartheta_1 a_{t-1} + a_t$$

donde L es el valor o nivel del proceso en su punto de origen o en el tiempo $t = 0$. Como señala Glass (1972), L es el resultado de una suma ponderada de impulsos aleatorios que proceden de un pasado infinito.

Se asume que dicho proceso se mantiene para los n_1 observaciones antes de la intervención I. La introducción de un tratamiento en un determinado punto de la serie permite esperar que su efecto altere, de forma brusca, su nivel en una cantidad fija «δ», para los puntos subsiguientes o $n_1 + 1 \dots N$. De esta forma el proceso, después de la intervención, puede ser descrito por:

$$z_t = L - \vartheta_1 a_{t-1} + a_t + \delta$$

siendo $t = n_1 + 1, \dots, N$.

Puesto que, por lo general, se desconoce el valor del parámetro «ϑ_1», que varía en el intervalo -1 a 1 y dado que, por otra parte, los Modelos ARIMA no suelen ser sistemas lineales en sus parámetros, no se podrá aplicar el criterio de mínimos cuadrados para la estimación de los mismos. Por dicha razón Glass y otros (1975), proponen la transformación de la serie en un sistema lineal general. De esta forma, la nueva serie así transformada queda definida por:

$$y_1 = z_1 = L + a_1$$
$$y_2 = z_2 + \vartheta_1 z_1 = L - \vartheta_1 a_1 + a_2 + \vartheta_1 L + \vartheta_1 a_1 = (1 + \vartheta_1)\ L + a_2$$

$$y_3 = z_3 + \vartheta_1 z_2 = L - \vartheta_1 a_2 + a_3 + \vartheta_1 L - \vartheta_1^2 a_1 + \vartheta_1 a_2 + \vartheta_1^2 L + \vartheta_1^2 a_1 = (1 + \vartheta_1 + \vartheta_1^2)L + a_3$$

$$\vdots$$

$$y_t = (1 + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_1^{n_1 - 1})L + a_t$$

Con ello se consigue un sistema de ecuaciones lineales susceptible de expresión matricial y permite la estimación de los parámetros L y δ, por el criterio de mínimos cuadrados. Así, la ecuación anterior puede ser expresada en forma de matriz por:

$$y = X\beta + a$$

siendo «y» el vector de los puntajes observados transformados, X la matriz del diseño, β el vector columna de los parámetros y a el vector columna de los errores.

Consideremos, a continuación, el efecto de la intervención en un punto de la serie $n_1 + 1$. La transformación de los puntajes toma la siguiente expresión:

$$y_{n_1 + 1} = z_{n_1 + 1} + \vartheta_1 y_{n_1}$$
$$= L - \vartheta_1 a_{n_1} + a_{n_1+1} + \delta + (1 + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_1^{n_1 - 1})L + \vartheta_1 a_{n_1}$$
$$= (1 + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_1^{n_1})L + a_{n_1+1} + \delta$$

Tomando todos los puntos u observaciones de la serie, es decir, para $t > n_1$, se obtiene la siguiente fórmula general del modelo:

$$y_t = (1 + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_1^{t-1})L + (1 + \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_1^{t-(n_1+1)})\,\delta + a_t$$

La solución por mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros L y δ es dada por:

$$\begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Dicho criterio de mínimos cuadrados, puesto que se desconoce el valor de ϑ_1, se aplica, según Glass y otros (1975), variando su valor en el intervalo -1 a $+1$ en pasos de 0.02, eligiéndose aquel valor de ϑ_1 que minimice la suma de cuadrados de los errores estimados. Por tanto, que minimice:

$$SC(\vartheta_1 | y) = a^T a = \Sigma \hat{a}_i^2$$

Por tanto, variando ϑ_1 en pequeños pasos, van calculándose las varianzas del error, s_a^2, y se toma el valor de ϑ_1 que minimice dicha varianza.

Este valor servirá para obtener una estimación de L, nivel de la serie en el tiempo cero, y δ o tamaño del efecto de la intervención en la serie. Para determinar el grado de significación de los parámetros L y δ, deben ser transformados en puntajes t, con N-2 grados de libertad, siendo N la cantidad total de observaciones de la serie. De acuerdo con la teoría de la distribución normal de muestreo la distribución de los estimadores de los parámetros es:

$$\frac{\hat{L} - L}{s_a \sqrt{d_1}} \approx t_{N-2}$$

y

$$\frac{\hat{\delta} - \delta}{s_a \sqrt{d_2}} \approx t_{N-2}$$

siendo d_1 y d_2, la primera y segunda entrada de la diagonal de la matriz del diseño inversa, $(X^T X)^{-1}$. Con ello puede probarse si los valores estimados de los parámetros son significativamente diferentes de cero. Si el valor t es mayor que el teórico para N-2 g.l., se infiere que el valor estimador del parámetro es significativo. En consecuencia, y centrándonos en el parámetro «δ», que representa el cambio de nivel que experimenta la serie después de la aplicación del tratamiento, si se verifica que es significativo podrá concluirse que el tratamiento ha sido efectivo.

8. *Conclusiones*

Se puede, por tanto, concluir que los análisis basados en los Modelos de series temporales y que en este escrito se ha centrado en el Modelo ARIMA (0,0,1), permiten estimar el grado de significación de un cambio de nivel que se opera como conscuencia de la aplicación de un tratamiento. Y no sólo permiten obtener inferencias estadísticas sobre la acción del tratamiento, sino que además resuelven el problema de dependencia inherente a este tipo de diseños en los que se utiliza un solo sujeto. Queda claro, que en este escrito sólo nos hemos fijado en un tipo de modelo, y sólo se ha planteado el problema de un cambio brusco de nivel tras la intervención.

No obstante, los modelos de series temporales, permiten no sólo obtener este tipo de inferencias, sino que a su vez, introduciendo los adecuados parámetros, se pueden extraer consecuencias sobre los posibles cambios de orientación de la serie como consecuencia de la introducción del tratamiento. Aquí sólo se ha presentado un modelo elemental de serie temporal, con el propósito de destacar su importancia como técnica de análisis aplicable a los diseños conductuales.

Como última consideración, cabe destacar la clara alternativa de análisis que supone la utilización de tales modelos, dado que a diferencia de otros análisis estadísticos, los modelos de series temporales resuelven satisfactoriamente uno de los problemas más importantes implícitos en los diseños conductuales: La dependencia serial. Los análisis de series temporales, tienen en cuenta el grado de dependencia existente entre las observaciones y permiten obtener inferencias válidas sin que por ello el investigador tenga que violar supuestos básicos del modelo estadístico o introducir variaciones a fin de soslayar dicho problema.

Resumen

El propósito de este escrito es plantear la posible alternativa, a nivel metodológico, al diseño experimental clásico. A continuación se analizan las principales propiedades que presentan los análisis basados en las series temporales y se hace una descripción del modelo ARIMA (0,0,1) como ejemplo de posible análisis de los diseños de base temporal.

Summary

The aim of this paper is to state the possible alternative to classical experimental design, at methodological level. After, there are analyzing the main properties that have the time series analysis and is made a ARIMA (0,0,1) Model description as a sample of temporal basis design analysis.

Résumé

L'article propose, au niveau méthodologique, une possible alternative au dessin expérimental classique. On analyse ensuite les principales propietés des analyses basées sur des séries temporales et on décrit le modèle ARIMA (0,0,1) comme exemple d'un possible analyse de dessin de base temporal.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, O. D.: *Time series analysis and forecasting: The Box-Jenkins approach.* Londres: Butterwoh, 1976.

BARTLETT, M. S.: On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series, *J. Roy. Stat. Soc.*, 1946, *8*, 27-41.

BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M.: *Time-series analysis: Forecasting and control.* San Francisco: Holden-Day, 1970.

CAMPBELL, D. T. y STANLEY, J. C.: Experimental and quasi-experimental designs for research on teaching. En N. L. Cage (Ed.), *Handbook or research on teaching.* Chicago: Rand McNally, 1963, p. 171-246.

CHASSAN, J. B.: *Research design in clinical psychology and psychiatry.* Nueva York: Appleton-Century-Crofts, 1967.

CHARFIELD, C.: *The analysis of time series: Theory and practice.* Londres: Chapman y Hall, 1975.

DAVIDSON, P. O. y COSTELLO, C. G.: *N = 1: Experimental studies of single cases.* Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1969.

GENTILE, J. R., RODEN, A. H. y KLEIN, R. D.: An analysis of variance model for the intrasubjet replication design. *J. Appl. Behav. Anal.* 1972, *5*, 193-198.

GLASS, G. V.: Estimating the effects of intervention into a non-stacionary time-series. *American Educational Research Journal*, 1972, *9*, 463-477.

GLASS, G. V., WILLSON, V. L. y GOTTMAN, J. M.: *Design and analysis of time-series experiments.* Boulder: Colorado Associated University, 1975.

GOTTMAN, J. M.: N-of-one and N-of-two research in psychotherapy. *Psychol. Bull.*, 1973, *80*, 93-105.

GOTTMAN, J. M. y GLASS, G. V.: Analysis of interrupted time-series experiments. En T.R. Kratochwill (Ed.), *Single subject research: Strategies evaluating change.* Nueva York: Academic Press, 1978.

HARTMANN, D. P., GOTTMAN, J. M., JONES, R. R., GARDNER, W., KAZDIN, A. E. y WAUGHT, R.: Interrupted time-series analysis and its application to behavioral data. *J. Appl. Behav. Anal.*, 1980, *13*, 543-559.

HERSEN, M. y BARLOW, D. H.: *Single case experimental designs.* Nueva York: Pergamon Press, 1976.

MCCLEARY, R. y HAY, R. A. Jr.: *Applied time series analysis for the Social Sciences.* Beverly Hills, CA: Sage Publications, 1980.

KAZDIN, A. E.: Statistical analysis for single-case experimental designs. En M. Herson y D. H. Barlow (Eds.), *Single case experimental designs.* Nueva York: Pergamon Press, 1976, p. 265-316.

SHAPIRO, M. B.: The single case in clinical-psychological research. *J. Gen. Psychol.*, 1966, *74*, 3-23.

SHEWART, W. A.: *The economic control of the quality of manufactured product.* Nueva York: Macmillan, 1931.

SHINE, L. C. y BOWER, S. M.: A one-way analysis of variance for single-subject designs. *Educational and Psychological Measurement*, 1971, *31*, 105-113.