METODO GRAFICO, BASADO EN LA PRUEBA DE KOLMOGOROV, PARA LA TIPIFICACION DE TESTS

JOSE M.ª DOMENECH MASSONS

Profesor de Estadística del Departamento de Psicología de la Facultad de Filosofía y Letras.
Universidad de Barcelona.

1. — NOTA PRELIMINAR

Una de las tareas que incumbe a la Psicología es la medida por medio de tests, de unos rasgos generalmente distribuidos en forma normal y corresponde al psicólogo la tipificación de los mismos.

Para ello, se ha de escoger una muestra de individuos de tamaño y composición adecuada con la población a la cual queremos baremar el test y seguir el proceso estadístico representado en el diagrama de bloques de la fig.. 1.

FIG. 1:

TABULACION → VALORES ESTADISTICOS → VERIFICACION DE LA NORMALIDAD DE LA DISTRIBUCION → BAREMO

De todo el procedimiento los dos últimos pasos realizados en forma analítica, requieren un considerable número de operaciones y el método gráfico que proponemos, permite a partir de la media , desviación tipo σ y porcentajes acumulados P_i de la distribución empírica: 1.º verificar su normalidad, 2.º obtener el baremo, en un tiempo inferior a los 5 minutos y por tanto notablemente reducido respecto al sistema clásico.

Estoy muy agradecido al Dr. J. Torrens Ibern a quien se debe la revisión científica de este trabajo.

2. — PRUEBA DE KOLMOGOROV:

2. 1. — Introducción teórica a la prueba. —

La prueba del profesor ruso Kolmorogov, estudia la **diferencia máxima D_n** —debida al azar y con un riesgo prefijado— **entre la función teórica de distribución S (x) de una variable aleatoria continua y los porcentajes acumulados P_i (x) de la distribución empírica de una muestra de tamaño n extraída de dicha población.**

Pudiendo demostrarse que **la distribución de las diferencias máximas D_n, es independiente de la función teórica S(x)**, Kolmogorov ha calculado la distribución D_n cuando el tamaño n, de la muestra de la distribución empírica, tiende a infinito.

Massey ha calculado la distribución de las diferencias máximas D_n para muestras de pequeño tamaño procedentes de una población de la que se conocen sus verdaderos parámetros (m_x; σ).

Lilliefors ha calculado la distribución D_n para muestras de pequeño tamaño procendentes de una **población normal de la que no se conocen sus parámetros.** En este caso, la prueba se realiza a partir de los parámetros (m_x; σ) de la muestra.

Así, las distribuciones de las diferencias máximas D_n estudiadas por Massey y Lilliefors, están dadas en la **tabla 7**, para distintos tamaños de muestra y distintos riesgos de primera especie.

Del mismo modo y por ser D_n independiente de la distribución teórica S(x), podemos resolver tanto problemas de tipo no paramétrico como problemas paramétricos tales como la verificación de la hipótesis de normalidad de una distribución.

Smirnov, profesor de la Universidad de Moscou, a partir de la prueba de Kolmogorov, ha estudiado las máximas diferencias $D_{m,n}$ —debidas al azar y con un riesgo prefijado— entre los porcentajes acumulados de las distribuciones empíricas de dos muestras de tamaño respectivo m y n extraídas de una misma población. De esta forma podemos verificar la hipótesis de que las dos muestras proceden de una misma población.

Desde el punto de vista psicológico, la prueba de Kolmogorov es útil para verificar la hipótesis de normalidad de una distribución y para comprobar si puede aceptarse la hipótesis de que dos muestras proceden de una misma población.

En este estudio empleamos la prueba de Kolmogorov para probar la hipótesis de normalidad. Tiene la ventaja sobre la prueba de χ^2 —además de permitir una interpretación gráfica fácil— de ser un método estadísticamente exacto para los tamaños de muestra habituales en psicología, mientras que la ley de χ^2 es sólo válida para muestras grandes.

2.2. — **Ejemplo.** —

Como ejemplo de aplicación analítica de la prueba de Kolmogorov, se ha escogido el estudio del Dr. M. Betran Quera y P. Valldeperes sobre la batería factorial al P.M.A. de Thurstone.

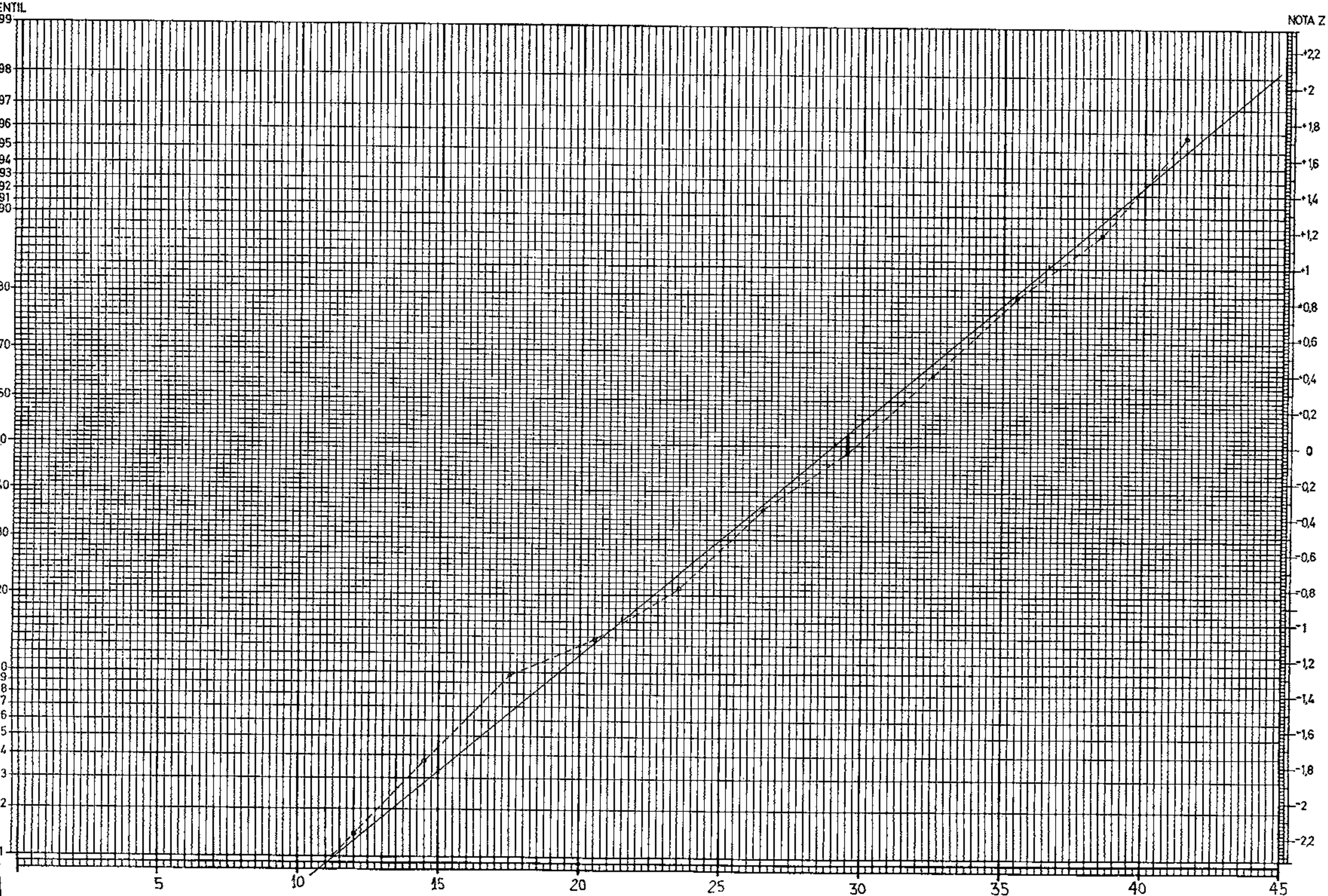
EJEMPLO 1: «Comprobar la normalidad de la distribución de las notas obtenidas en el test de comprensión verbal (factor «V») por un grupo de 299 alumnos de 4.º curso de bachillerato del Colegio S. Ignacio de Barcelona. (Tabla 1).

La distribución tiene una media de 29,06 puntos y una desviación tipo de 7,62 puntos.»

Se construye la **tabla 1** con las siguientes columnas:

(1) : Intervalos de clase
(2) : Efectivos o número de observaciones

UNIVERSIDAD DE BARCELONA
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGIA
ESTADISTICA



P.M.A.: Factor "V"

(3) : Frecuencias acumuladas
(4) : Porcentajes acumulados de la distribución empírica
(5) : Límites superiores de los intervalos de clase
(6) : Diferencias entre los límites superiores de los intervalos de clase y media.
Simbólicamente: (6) = (5) — m_x = (5) — 29,06
(7) : Valores de la variable tipificada correspondientes a los límites superiores de los intervalos de clase que siguen una ley normal teórica de media $m_x = 29{,}09$ y desviación tipo $\sigma = 7{,}62$

$$z_i = \frac{L_i - m_x}{\sigma} = \frac{L_i - 29{,}06}{7{,}62}$$

Simbólicamente: (7) = (6) : σ = (6) : 7,62
(8) : Areas (con su signo) obtenidas de la ley normal reducida a partir los valores de la variable tipificada de la columna (7)
(9) : Porcentajes acumulados correspondientes a la ley normal teórica de media 29,06 y desviación tipo 7,62
Simbólicamente: (9) = 50 + (8)
(10) Diferencias entre los porcentajes acumulados de las distribuciones **empírica** y **teórica** en valor absoluto.
Simbólicamente: (10) = (4) — (9)

TABLA 1:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
x	f_i	F_i	P_i	L_i	L_i-m_x	z_i	$P(z_i)$	S_i	(P_i-S_i)
6— 8	1	1	0,33	8,5	—20,56	—2,70	—49,65	0,35	0,02
9—11	3	4	1,34	11,5	—17,56	—2,30	—48,93	1,07	0,27
12—14	7	11	3,67	14,5	—14,56	—1,91	—47,19	2,81	0,86
15—17	18	29	9,69	17,5	—11,56	—1,52	—43,57	6,43	3,26
18—20	12	41	13,69	20,5	— 8,56	—1,12	—36,86	13,14	0,55
21—23	22	63	21,04	23,5	— 5,56	—0,73	—26,73	23,27	2,23
24—26	45	108	36,07	26,5	— 2,56	—0,34	—13,31	36,69	0,62
27—29	37	145	48,43	29,5	0,44	0,06	2,39	52,39	3,96
30—32	51	196	65,46	32,5	3,44	0,45	17,36	67,36	1,90
33—35	43	239	79,83	35,5	6,44	0,84	29,95	79,95	0,12
36—38	26	265	88,51	38,5	9,44	1,24	39,25	89,25	0,74
39—41	22	287	95,86	41,5	12,44	1,63	44,84	94,84	1,02
42—44	12	299	100	44,5	15,44	2,03	47,88	97,88	2,12

La máxima diferencia entre la distribución teórica y empírica la apreciamos en la columna (10) de la **tabla 1.** Vale:

$$D_n = \frac{|\, P_i - S_i \,| \text{ max.}}{100} = \frac{3{,}96}{100} = 0{,}0396$$

Dividimos por 100 puesto que la **tabla 7** nos da las referencias D_n en tanto por uno. Como la prueba se ha realizado a partir de la media y desviación tipo de la muestra, la **tabla de Lilliefors** nos dará la máxima diferencia permisible:

TABLA 2

	RIESGO DE 1.ª ESPECIE	
	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 1\,\%$
N = 299	$D_n = \dfrac{0{,}886}{\sqrt{299}} = 0{,}0512$	$D_n = \dfrac{1{,}031}{\sqrt{299}}$ 0,0594

Puesto que $D_n = \dfrac{|\,P_i - S_i\,|\ \text{max.}}{100} = 0{,}0396$ es menor que 0,0512 **nada se opone a la afirmación de la hipótesis de normalidad de la distribución.**

3. — PRUEBA GRAFICA DE NORMALIDAD:

3.1. — Introducción teórica a la prueba

Si disponemos de un gráfico como el de la figura 4 (esquematizado en la fig. 2) con el eje de ordenadas graduado centil a centil (según la ley normal) y con el eje de abcisas graduado de medio punto en medio punto según las notas directas, es fácil demostrar que una distribución perfectamente normal está representada sobre este gráfico por una recta (Recta de Henri).

Los distintos porcentajes acumulados S_i calculados en la prueba de Kolmogorov, columna (9) de la tabla 1, correspondientes a la ley normal teóri-

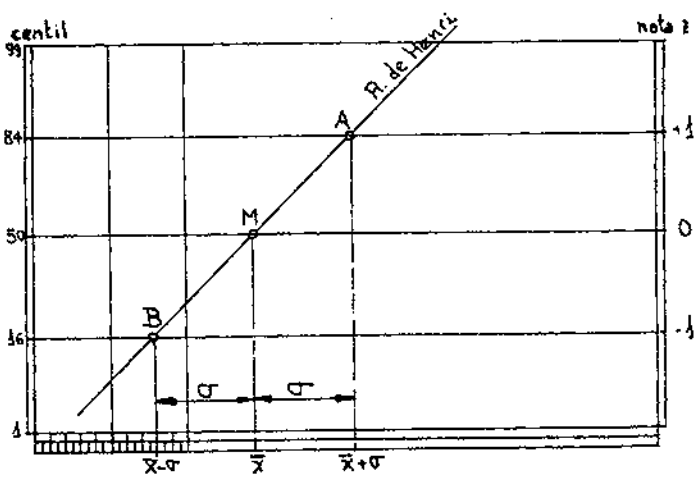


FIG. 2

Punto	X_i	z_i
A	$m_x + \sigma$	1
B	$m_x - \sigma$	-1
C	m_x	0

TABLA 3

ca de media m_x y desviación tipo σ, están sobre la recta de Henri que pasa evidentemente por los puntos A; B; M de la **fig. 2** que son los indicados en la **tabla 3.**

En el gráfico de la figura 4, las ordenadas $z = 1$ y $z = -1$, correspondientes a los centiles 84 y 16 respectivamente, están dibujadas con líneas de trazo grueso con el fin de facilitar la representación de la recta de Henri.

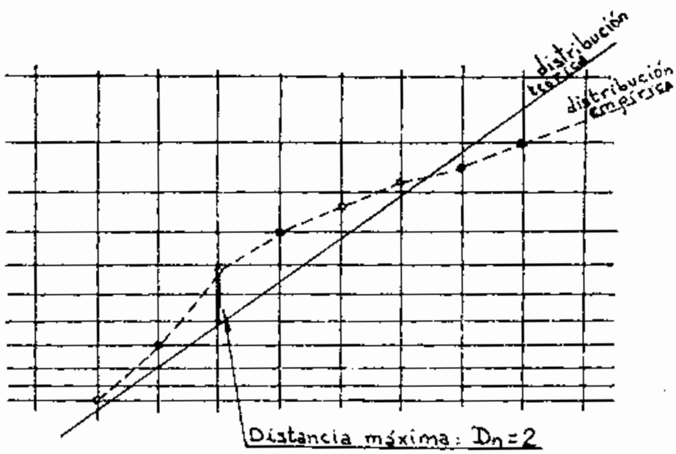
Si además dibujamos sobre el gráfico los porcentajes acumulados (que coinciden con los centiles) de la distribución a estudiar, obtendremos una **línea quebrada** que **representa la distribución empírica.** Los puntos de dicha línea quebrada corresponden en la prueba de Kolmogorov a los valores P_i, columna (4) de la tabla 1.

Nota: A fin de mejorar la lectura de la distancia máxima D_n, es interesante **tomar la escala del eje de abcisas** de forma que la recta de Henri presente una inclinación aproximada de 45°, tal como está representada en la fig. 2.

3.2. — Cálculo gráfico de la máxima distancia D_n. —

Una vez representadas las distribuciones teórica y empírica sobre el mismo gráfico, se obtiene un dibujo parecido al esquematizado en la **fig. 3.**

FIG. 3:



En este caso, $| P_i - S_i |$ max. es la máxima distancia o diferencia entre la recta de Henri (distribución teórica) y la línea quebrada (distribución empírica).

Las divergencias se miden gráficamente por el número de centiles (líneas horizontales del gráfico) que hay entre la ordenada de la recta de Henri y la ordenada de la línea quebrada. Así por ej., según el dibujo de la fig. 3,

$|P_i - S_i|$ max. vale aproximadamente 2, puesto que la máxima distancia entre la recta (línea contínua) y la quebrada (línea de trazos) es de centiles. El valor D_n será:

$$D_n = \frac{|P_i - S_i| \ \max}{100} = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

Si la diferencia máxima D_n no supera, el nivel de confianza escogido, el valor dado por la tabla de Lilliefors, pensaremos que las diferencias son debidas al azar. En caso contrario no podremos aceptar la hipótesis de que la muestra ha sido extraída de una población normal.

4. — OBTENCION GRAFICA DEL BAREMO:

Los centiles se calculan, en forma analítica, mediante una interpolación lineal entre los porcentajes acumulados correspondientes a dos intervalos de clase consecutivos.

La interpolación se realiza gráficamente uniendo los puntos representativos de los porcentajes acumulados (centiles) de la distribución empírica. Estos segmentos forman la línea quebrada antes mencionada, línea que sobre el gráfico nos da la **correspondencia entre notas directas y centiles.**

Podremos leer en el gráfico, para cada nota directa su centil correspondiente o para cada centil su nota directa, según nos interese. De esta forma se obtiene el baremo.

Puesto que el gráfico está graduado por su lado derecho en notas z, si deseamos construir un baremo en puntuaciones z, hasta realizar las mismas operaciones pero leyendo en la **escala z** en vez de leer en la **escala centil.**

Nótese que la **línea quebrada** da la correspondencia entre **notas directas y puntuación tipo normalizada.** La recta de Henri da la correspondencia entre **notas directas y puntuación tipo.**

5. — EJEMPLO DE APLICACION DEL METODO GRAFICO:

En resumen, para resolver el ejemplo 1 completo, hay que calcular en primer lugar los valores estadísticos (m_x; σ) y luego, por aplicación del método gráfico, se verifica la normalidad de la distribución y se obtiene el baremo.

EJEMPLO 2: «Obtener el baremo en centiles, para el test de comprensión verbal (factor «V») de la batería **P.M.A.**, a partir de las notas obtenidas por un grupo normativo de 299 alumnos de 4.º curso de bachillerato. Las notas son las dadas en la **tabla 1.**»

Se siguen los tres pasos indicados en el diagrama de bloques de la fig. 1; para ello se construye la **tabla 4** cuyas 6 primeras columnas sirven para hallar los valores estadísticos (m_x; σ) que permiten dibujar la **recta de Henri**, y las 3 últimas que dan los porcentajes acumulados (percentiles) correspondientes a cada extremo superior del intervalo de clase a fin de dibujar la **distribución empírica** sobre el gráfico.

TABLA 4:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
x	f_i	x_i	t_i	$f_i t_i$	$f_i t_i^2$	F_i	P_i	L_i	*CALCULOS*
6—8	1	7	—7	—7	49	1	0,33	8,5	*Media:*
9—11	3	10	—6	—18	108	4	1,34	11,5	
12—14	7	13	—5	—35	175	11	3,67	14,5	$m_x = 28 + \frac{106}{299} \cdot 3 = 29{,}06$
15—17	18	16	—4	—72	288	29	9,69	17,5	
18—20	12	19	—3	—36	108	41	13,69	20,5	*Desviación tipo:*
21—23	22	22	—2	—44	88	63	21,04	23,5	
24—26	45	25	—1	—45	45	108	36,07	26,5	$\sigma^2 = 3^2 \left[\frac{1.970}{299} - \left(\frac{106}{299}\right)^2\right] =$
27—29	37	28	0	0	0	145	48,43	29,5	
30—32	51	31	1	51	51	196	65,46	32,5	$\sigma^2 = 58{,}167$
33—35	43	34	2	86	172	239	79,83	35,5	
36—38	26	37	3	78	234	265	88,51	38,5	$\sigma = \sqrt{58{,}167} = 7{,}62$
39—41	22	40	4	88	352	287	95,86	41,5	
42—44	12	43	5	60	300	299	100	44,5	
TOTAL	299			106	1970				

Primero se dibuja sobre el gráfico de la figura 4 la **recta de Henri** que pasa por los puntos:

$$m_x + \sigma = 29{,}06 + 7{,}62 = 36{,}68 \rightarrow A\ (36{,}68\ ;\ 1)$$
$$m_x - \sigma = 29{,}06 - 7{,}62 = 21{,}44 \rightarrow B\ (21{,}44\ ;\ -1)$$
$$m_x = 29{,}06 = 29{,}06 \rightarrow C\ (29{,}06\ ;\ 0)$$

Luego se representan sobre el gráfico los puntos correspondientes a la distribución empírica que están dados por las columnas (8) y (9) de la tabla 4. Uniéndolos se obtiene la línea quebrada que vemos en la figura 4.

La máxima distancia se observa que está en el punto 29,5 y corresponde aproximadamente a 4 unidades (ya que en este punto la distribución teórica y empírica están separadas por 4 centiles).

En la tabla de Lilliefors (**tabla 7**) —igual que para el ej 1— obtenemos el valor D_n máximo para N = 299:

TABLA 5

	RIESGO DE 1.ª	ESPECIE
	$\alpha = 5\ \%$	$\alpha = 1\ \%$
N = 299	$D_n = \sqrt{\dfrac{0,886}{299}} = 0,0512$	$D_n = \sqrt{\dfrac{1,031}{299}} = 0,0594$

$$D_n = \frac{|\, P_i - S_i \,|\ \max.}{100} = \frac{4}{100} = 0,04$$

Puesto que 0,04 es menor que 0,0512, nada se opone a la afirmación de la hipótesis de normalidad de la distribución. (Nótese la coincidencia con lo obtenido mediante el largo proceso analítico del ejemplo 1).

TABLA 6

x	centil
5	0
11	1
13	2
15	4
17	8
19	12
21	15
23	20
25	28
27	38
29	46
31	57
33	68
35	77
37	84
39	90
41	94
45	100

BAREMO:

El gráfico permite obtener el baremo según la **tabla 6**, es decir, viendo los centiles correspondientes a determinadas notas (de dos puntos en dos puntos; por ej.).

A fin de aumentar la información contenida en el baremo, **por convenio** asignaremos el **centil cero** a la nota directa más pequeña (alcanzada por todos los individuos de la muestra normativa) y **centil cien** a la primera nota directa que ningún individuo ha alcanzado.

6. — CONCLUSIONES:

El método propuesto, tal como hemos demostrado, constituye un rápido proceso de verificación de la normalidad y obtención del baremo, a partir de las notas obtenidas por el grupo normativo, con notable rigurosidad estadística, a pesar de ser un procedimiento gráfico y en consecuencia aproximado. No obstante la precisión de los resultados está dentro de los límites exigidos en psicometría.

Es un método aconsejable para simplificar los procesos de cálculo en gabinetes psicométricos y en trabajos de investigación siempre que no se disponga de un ordenador digital de sobremesa para efectuar los cálculos.

7.—TABLAS PARA LA PRUEBA DE KOLMOGOROV: **TABLA 7:**

Tamaño de la muestra (n)	Massey $\alpha=0{,}05$	Massey $\alpha=0{,}01$	Lilliefors $\alpha=0{,}05$	Lilliefors $\alpha=0{,}01$
1	0,975	0,995	—	—
2	0,842	0,929	—	—
3	0,708	0,828	—	—
4	0,624	0,733	0,381	0,417
5	0,565	0,669	0,337	0,405
6	0,521	0,618	0,319	0,364
7	0,486	0,577	0,300	0,348
8	0,457	0,543	0,285	0,331
9	0,432	0,514	0,271	0,311
10	0,410	0,490	0,258	0,294
11	0,391	0,468	0,249	0,284
12	0,375	0,450	0,242	0,275
13	0,361	0,433	0,234	0,268
14	0,349	0,418	0,227	0,261
15	0,338	0,404	0,220	0,257
16	0,328	0,392	0,213	0,250
17	0,318	0,381	0,206	0,245
18	0,309	0,371	0,200	0,239
19	0,301	0,363	0,195	0,235
20	0,294	0,356	0,190	0,231
25	0,270	0,320	0,180	0,203
30	0,240	0,290	0,161	0,187
sup a 30	$\frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}63}{\sqrt{n}}$	$\frac{0{,}886}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}031}{\sqrt{n}}$

NOTAS:

— Los valores dados por Massey se refieren a leyes de probabilidad de variable contínua con parámetros conocidos independientemente de la muestra.

— Los valores dados por Lilliefors se refieren a una ley de probabilidad normal con parámetros desconocidos estimados mediante la muesra.

FUENTES:

Valores de Massey «Cuadernos de estadística aplicada e Investigación operativa» Vol II, fasc. 3, 1963. pag. 195.

Valores de Lilliefors: «Journal of the American Stadistical Association» Vol. 62, n.º 318, 1967. Pág. 400.

RESUMEN

El proceso estadístico a seguir en la tipificación de tests que miden rasgos distribuidos normalmente comprende:

1.º—Cálculo de los parámetros estadísticos.

2.º—Verificación de la hipótesis de normalidad de la distribución empírica obtenida.

3.º—Cálculo del baremo.

Los pasos segundo y tercero, realizados analíticamente, requieren un considerable número de operaciones. El método gráfico propuesto permite, a partir de la media m_x de la desviación tipo σ y de los porcentajes acumulados P_i de la distribución empírica, **verificar la normalidad** y **obtener el baremo** con una precisión superior a ± 0,4 puntos, en un tiempo inferior a los cinco minutos.

RESUME

Dans l'étalonnage de la distribution des tests —qui mésurent des caractères distribués normalment— le processus à suivre est détérminé par:

1.—Calcul des paramètres statistiques.

2.—Vérification de l'hypothése de normalité de la distribution expérimental obtenue.

3.—Calcul du barême.

Pour realiser analytiquement les points second et troisième, il faut un grand nombre d'operations. La méthode graphique proposée permet de **vérifier la normalité** et **d'obtenir le barême** avec une précision supérieure à ± 0,4 points, en moins de cinq minutes, à partir de la moyenne x, de l'écart-type σ et des pourcentages cumulés P_i de la distribution expérimentale.

SUMMARY

The statistic process to standardize distributions of psychological tests, which measure the normal distribution aspects, comprises:

1st—To compute the mean and standard deviation.

2nd—To test the normal hypothesis of empirical distribution obtained.

3rt—To compute the profile chart.

To make the second and third analytically require a great number of operations. With the graphic procedure that we suggest we can **test the normality** and **obtain the profile chart** with a precission superior to ± 0,4 points in no more than five minutes, from the mean x, the standard deviation σ and the cummulative percentages P_i of the empirical distribution.