LSC

El llenguatge matemàtic i el cervell

Oriol Busquets i Prat
Inspector d'Educació. Professor de matemàtiques
obusquet@xtec.cat

Recepció: 11/03/2015, acceptació: 15/05/2015

Resum: L'article comença intentant delimitar el concepte de *llenguatge matemàtic*. S'adopta el criteri de considerar *llenguatge matemàtic* qualsevol llenguatge que és útil per fer matemàtiques. Aquest llenguatge no té una única modalitat; pot ser, per exemple, la mateixa llengua natural, un llenguatge simbòlic, un llenguatge geomètric...

La part central de l'article es dedica a fer una breu reflexió sobre les característiques principals del llenguatge que usem per fer matemàtiques: precisió com a tret oposat a ambigüitat, abstracció en el sentit de no fer referència a realitats materials, rigor en l'aplicació del raonament lògic, operativitat i alta densitat de significat intern.

Finalment es fa una breu relació d'algunes de les capacitats mentals que s'activen per fer ús del llenguatge matemàtic.

Mots clau: llenguatge, lògica, matemàtiques

El lenguaje matemático y el cerebro

Resumen: El artículo empieza intentando delimitar el concepto de *lenguaje matemático*. Se adopta el criterio de considerar *lenguaje matemático* cualquier lenguaje que sea útil para hacer matemáticas. Este lenguaje no tiene una única modalidad; puede ser, por ejemplo, la propia lengua natural, un lenguaje simbólico, un lenguaje geométrico...

La parte central del artículo se dedica a reflexionar brevemente acerca de las principales características del lenguaje que usamos cuando hacemos matemáticas: precisión como opuesto a ambigüedad, abstracción en el sentido de no referirse a realidades materiales, rigor en la aplicación del razonamiento lógico, operatividad y alta densidad de significado interno.

Finalmente se hace una breve relación de algunas de las capacidades mentales que se activan cuando se usa el lenguaje matemático.

Palabras clave: lenguaje, lógica, matemáticas

Mathematical language and brain

Abstract: The article starts delimiting the concept of mathematical language. The criteria used is to consider mathematical language any language that is useful for mathematics. This language doesn't have only a modality; it can be, for example, a natural language, a symbolic language, a geometrical language…

The article is mostly a short reflexion upon the main features of the language used in mathematics: precision against ambiguity, abstraction because it doesn't refer to a material reality, accuracy in applying logical thought, effectiveness and high density of internal meaning.

Finally there is a short explanation of some mental abilities that are activated by using mathematical language.

Key words: language, logics, mathematics

1. Què entenem per *llenguatge matemàtic*?

Per poder parlar del llenguatge matemàtic, abans ens hauríem de posar d'acord sobre què ens referim. És evident que el llenguatge matemàtic té a veure amb les matemàtiques i sabem que no és gens senzill donar una definició de matemàtiques amb la qual estiguin d'acord tots els experts. Per tant, sembla clar que tampoc no serà gens senzill delimitar què entenem per llenguatge matemàtic.

Per començar, adoptarem una definició de matemàtiques amb la qual estem d'acord i que ens permetrà després acotar mínimament el que entenem per llenguatge matemàtic. La definició de matemàtiques que adoptem és la de Hans Freudenthal (1905-1990): 'Els termes, conceptes i procediments matemàtics són instruments amb els quals organitzem mentalment fenòmens del món físic, social i mental'. Per poc que hi reflexionem, veurem que és una definició que no ens diu ben bé què són les matemàtiques sinó que especifica de què estan constituïdes i per a què serveixen. El que queda clar és que, d'acord amb aquesta definició, les matemàtiques són una construcció de la ment humana que ajuda a comprendre i raonar, ja que organitza de determinada manera els fenòmens que ens envolten i els que són propis del nostre raonament.

Ara que hem delimitat —bé que de manera no del tot precisa— què entenem per matemàtiques, podríem dir que el llenguatge matemàtic és el llenguatge en què podem expressar coneixements matemàtics. Aquest llenguatge no és únic, ja que dependrà del nivell d'aprofundiment en què estiguem treballant. Així, per exemple, en unes primeres fases de l'aprenentatge el llenguatge matemàtic serà la llengua natural i aprendrem en la nostra llengua pròpia conceptes tan bàsics com *a sobre*, *a sota*, *més gran que*, *un*, *dos*, *tres*, *més lluny que*… Conceptes que, efectivament, són molt bàsics però que tenen un component matemàtic innegable, tot i que també es podrien considerar prematemàtics. Per tant, les llengües naturals tenen en un determinat moment de l'aprenentatge el paper de llenguatge matemàtic. Evidentment, quan es parla de llenguatge matemàtic normalment no ens referim a aquest vessant de les llengües naturals, sinó que ens referim als llenguatges que usem per fer matemàtiques a nivells més avançats: els sistemes de numeració, el llenguatge algebraic, l'ús de fórmules i diversos nivells de complexitat que podríem anar enumerant fins a arribar al llenguatge conjuntista, que és el que avui en dia es considera propi dels estudis en matemàtica avançada.

2. Característiques del llenguatge matemàtic

2.1. Precisió

Per fer matemàtiques cal usar un llenguatge precís, que no admeti ambigüitats, és a dir, dobles interpretacions.

Per mostrar que la llengua natural a vegades és ambigua, usarem com a exemple una frase:

Una jove veu l'amenaça

En llegir aquesta frase, una part dels receptors del missatge s'imagina una veu d'una persona jove amenaçant algú i una altra part s'imagina una noia jove que veu un fet amenaçador.

Aquest fenomen, en matemàtiques no hauria de ser possible. És a dir, el llenguatge que usem per fer matemàtiques no pot tenir lectures diferents.

Si bé és cert que en estudis avançats de matemàtiques i usant llenguatges formalment molt desenvolupats és impensable que puguem trobar expressions ambigües, en estadis menys desenvolupats del coneixement matemàtic podem trobar exemples d'una mateixa paraula que s'usa amb significats diferents. Un cas molt senzill és la paraula *radi*. En les frases següents la paraula *radi* és usada amb dos significats diferents:

Dibuixem una circumferència de radi 5 cm
El segment CA és un radi de la circumferència

Òbviament les dues frases són correctes, però en la primera la paraula *radi* s'usa per determinar la distància de cada un dels punts de la circumferència al centre i, en canvi, en la segona frase la paraula *radi* designa un dels segments que uneix el centre de la circumferència amb un dels seus punts.

2.2. Abstracció

La matemàtica no és una ciència experimental. Això no vol dir que no formalitzi a partir de la realitat i, encara menys, que els resultats que obté no tinguin aplicacions pràctiques. Però els conceptes amb què treballa la matemàtica són abstractes i els resultats que obté són producte del raonament lògic i no de l'experimentació.

Un concepte tan senzill com el de *triangle* és un constructe de la ment, diferent, per exemple, que el concepte de *cadira*. Al món hi ha cadires, i és a partir d'aquests objectes que elaborem el concepte de *cadira*. Al món, en canvi, no hi ha triangles; en tot cas hi ha objectes que tenen formes que evoquen el triangle, o als qui són aplicables les propietats dels triangles. A partir de les formes de determinats objectes, la ment construeix el concepte de *triangle*, que passa a ser un concepte amb entitat pròpia del qual es poden estudiar les propietats, classificar-ne els diferents tipus, establir-ne les relacions entre els seus elements... Un cop s'arriba a conclusions, a partir d'aquest estudi abstracte, aquestes es poden aplicar als objectes que tenen forma de triangle.

En matemàtica, sovint s'aplica aquest esquema de funcionament:

- A partir de la realitat es produeix el que s'anomena una *modelització*, és a dir, es construeix un model matemàtic teòric abstracte que s'adeqüi a la realitat observada.
- Es treballa en aquest model teòric abstracte mitjançant el llenguatge matemàtic i s'arriba a conclusions.
- Finalment es retorna a la realitat observada i s'hi apliquen les conclusions obtingudes en el model matemàtic emprat.

El treball matemàtic, i per tant el llenguatge matemàtic, no té com a referent directe la realitat, sinó un model abstracte destil·lat d'aquesta realitat. Naturalment el treball matemàtic serà més útil i aplicable com millor s'ajusti el model construït a la realitat observada.

2.3. Rigor

En matemàtica, el llenguatge s'ha d'usar amb rigor. És a dir, cal respectar les normes del raonament lògic en general i usar només les propietats que relacionen els conceptes matemàtics, d'acord amb els axiomes o les premisses de la teoria en què treballem.

Sovint es confon rigor amb formalització. És a dir, hi ha l'opinió que com més elevat és el grau de formalització del llenguatge, més rigor comporta en el raonament. Això no és cert: rigor i formalització no són sinònims.

Vegem un parell d'exemples de la història de la matemàtica que ens ho il·lustren. Quan Gottlob Frege (1848-1925) estava a punt de publicar, l'any 1902, el segon volum de la seva obra *Les lleis bàsiques de l'aritmètica*, en què pretenia construir l'aritmètica a partir dels principis de la lògica axiomàtica, va rebre una carta d'un jove, Bertrand Russell (1872-1970), mostrant-li que, malgrat l'elevat nivell de formalització del seu text, la manera com es tractava els conjunts portava a paradoxes. Els conjunts, en general, no són elements d'ells mateixos. Per exemple, el conjunt dels nombres parells, com que és un conjunt de nombres i no és un nombre parell, no és un element de si mateix. Per tant, considerar el conjunt dels conjunts que no són elements d'ells mateixos no sembla cap idea descabellada. Aquest conjunt, en el llenguatge conjuntista que usava Frege, s'escriuria:

$$A = \{x / x \notin x\}$$

Aquí apareix, però, una paradoxa quan ens preguntem si el conjunt A és element d'ell mateix o no. Aquesta pregunta no es pot respondre, ja que si $A \in A$, com que precisament el que caracteritza els elements d'A és el fet de no ser elements de si mateixos, resultaria que $A \notin A$. Però si $A \notin A$, com que justament aquesta és la condició que s'ha de complir per ser element d'A, resultaria que $A \in A$. Conclusió: ens trobem amb una paradoxa perquè, tal com estava fent les coses Frege, resultava que hi havia afirmacions que no podien ser certes, ni elles ni la seva negació.

Una versió molt més quotidiana i popular de la paradoxa de Russell és la que s'explica dient que en un poble on només hi havia un barber es va dictar un edicte en què es deia que el barber només afaitaria totes aquelles persones del poble que no s'afaitessin elles mateixes. Per poc que hi pensem ens adonarem que, en aquestes condicions, el barber no es pot afaitar ni deixar d'afaitar-se.

Un altre fet que exemplifica que *formalització* no és sinònim de *rigor* és la demostració que Andrew Wiles (1953) va fer de l'anomenat últim teorema de Fermat. En una primera versió de l'any 1993, segur que formalment impecable, els experts hi van detectar un error en el rigor del raonament. Afortunadament, l'error era esmenable i el mateix Wiles va presentar dos anys després, el 1995, una nova versió de la demostració que va ser plenament acceptada per la comunitat matemàtica internacional.

Si tenim en compte que el procediment per excel·lència de l'activitat matemàtica és la demostració, ja entendrem que el rigor en l'aplicació dels principis de la lògica ha de ser una característica prioritària del llenguatge matemàtic. Aquí s'obriria un camp molt ampli per reflexionar sobre les diferents tècniques i llenguatges que s'usen per fer demostracions a matemàtiques: deducció, reducció a l'absurd, inducció, demostració del contrarecíproc, existència de contraexemples...

2.4. Operativitat

Quan el llenguatge matemàtic deixa de ser llenguatge natural i assoleix un cert nivell de formalització, ho fa amb un doble objectiu. D'una banda, la simplificació, és a dir, l'economia de caràcters en l'expressió de determinats conceptes i relacions. D'altra banda, i no menys important, l'operativitat, és a dir, fer possible els càlculs i les operacions.

Un dels exemples més senzills el tenim en els sistemes de numeració. No hi ha dubte que un sistema de numeració forma part del llenguatge matemàtic tal com l'hem considerat. El sistema de numeració que s'ha acabat imposant és l'indoàrab i ho ha fet per motius molt clars. Primer perquè té una gran economia de signes. Però sobretot perquè és el més operatiu dels sistemes coneguts. Els algorismes de les operacions elementals (suma, resta, multiplicació i divisió) són relativament senzills en aquest sistema de numeració. Altres sistemes de numeració, com el romà, només serveixen per escriure nombres però no per operar-hi.

Si avancem una mica en complexitat i ens fixem en les expressions algebraiques, ens adonem que la seva gran virtut és que puguem operar-hi. Si una equació només servís per descriure una situació en què intervenen nombres i traduir un text de la llengua natural a una expressió algebraica, perdria tota la importància. La utilitat del llenguatge algebraic rau en la seva operativitat. És a dir, podem operar i resoldre, o intentar resoldre, les equacions. Vegem-ho amb un exemple senzill. Sabem que hem posat 45 litres de benzina i que pagant 60 € ens n'han tornat 6 de canvi. Ens preguntem a quant va el litre de benzina. La gràcia del llenguatge matemàtic no és poder escriure l'equació $45 \cdot x + 6 = 60$, sinó que en aquesta equació podem operar i calcular el valor d' x, que representa el preu, en euros, d'un litre de benzina:

$$45 \cdot x + 6 = 60$$
$$45 \cdot x = 60 - 6$$
$$45 \cdot x = 54$$
$$x = \frac{54}{45} = 1,2$$

Si entrem en el camp de les funcions, aleshores el llenguatge matemàtic formalitzat és indispensable, precisament perquè és operatiu i permet el treball en els diferents aspectes que intervenen en una funció: imatge, antiimatge, estudi de la seva gràfica…

Podríem continuar esmentant camps de treball de la matemàtica i veuríem que per a cada un s'ha anat desenvolupant el corresponent llenguatge i que, en cada cas, una qualitat indispensable que ha de tenir aquest llenguatge és que sigui operatiu. Quan s'arriba a estadis superiors en l'estudi de la matemàtica, aquesta operativitat del llenguatge pot arribar a ser tan complexa que calgui una gran expertesa per emprar-lo.

2.5. Alta densitat de significat intern

El coneixement matemàtic té un caràcter altament acumulatiu. És a dir, la comprensió d'un concepte comporta necessàriament el coneixement dels conceptes previs que s'han usat en la seva construcció. Aquesta característica, evidentment, és comuna en menor o major grau a tots els coneixements. El que diferencia el cas del coneixement matemàtic és que la referència és interna, és a dir, els coneixements matemàtics es construeixen exclusivament a partir d'altres coneixements també matemàtics. Això provoca que en un concepte matemàtic, per senzill que sigui, hi ha implícits molts conceptes i significats interns de la pròpia matemàtica. És aquesta característica la que anomenem *alta densitat de significat intern*.

Pensem, per exemple, en el concepte *triangle rectangle*. Tot i que ens sigui molt senzill visualitzar-ne un, comprendre el concepte vol dir saber què és un triangle (un polígon de tres costats) i, per tant, saber què és un polígon (una figura plana, tancada i delimitada per segments), i saber què és un angle recte (un angle de 90º, és a dir, un angle que abraça la quarta part de l'angle que abraça tota una circumferència). Tot això cal saber-ho perquè la definició de *triangle rectangle* és: 'un triangle que té un dels seus angles recte'.

Després del que acabem d'exposar, pot ser un bon exercici enunciar, per exemple, el teorema de Pitàgores, que quan hi estem habituats ens sembla un enunciat molt senzill i clar, i fer l'exercici de fer una relació exhaustiva de tots els coneixements que se suposen sabuts, tots matemàtics, per poder entendre què s'està dient.

No cal dir que si sortim de la matemàtica elemental i ens endinsem en la matemàtica superior, la densitat de significat intern augmenta de manera exponencial. Per exemple, per comprendre la proposició *Dues bases diferents d'un mateix K-espai vectorial tenen el mateix nombre d'elements*, que podem trobar en manuals d'àlgebra bàsica, cal tenir assolits prèviament, pel cap baix, els coneixements següents: operació interna, operació externa, propietats de les operacions, estructura algebraica de grup abelià, estructura algebraica de cos, independència lineal, combinació lineal... Això sense esmentar-los tots i quedant-nos només a un primer nivell, ja que per comprendre què és una operació interna, cal saber què és un producte cartesià, què és una aplicació...

Sens dubte, no hi ha cap altra àrea del coneixement en què aquest fenomen d'acumulació reiterada de significats propis de l'àrea es produeixi, ni de bon tros, d'una manera tan destacable.

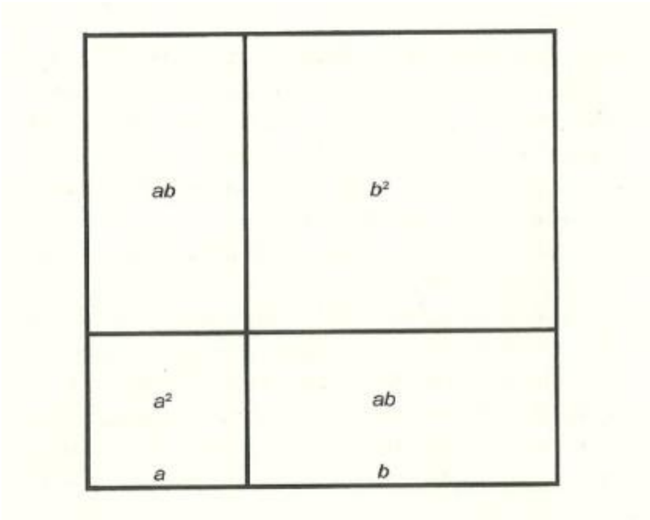
3. Traducció i modalitats del llenguatge matemàtic

El llenguatge matemàtic, quan té especificitat formal i deixa de ser la llengua natural, pren també diverses formes o modalitats. Podríem dir, per exemple, que el valor del quadrat d'un binomi es pot expressar en llenguatge algebraic:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Però també es pot expressar en llenguatge geomètric. En efecte, observem la figura 1:

Figura 1. Quadrat d'un binomi



Veiem que el quadrat de la figura té per costat $a+b$ i que, per tant, l'àrea total val el quadrat d' $a+b$. Però tal com està descompost aquest quadrat és clar que aquesta àrea és el quadrat d' a més el quadrat de b més les dues àrees dels rectangles de costats a i b, és a dir, dues vegades el producte ab. Veiem, doncs, que, de manera geomètrica, la il·lustració ens està expressant el mateix que anteriorment havíem escrit en llenguatge algebraic. Per tant, hi ha expressions que són traduïbles entre modalitats diferents del llenguatge matemàtic. És important tenir en compte això, perquè hi ha persones a qui els és molt més fàcil el treball en el camp de la geometria i que, per exemple, quan es plantegin el quadrat d'una suma ho visualitzaran segons la il·lustració; i n'hi ha d'altres que de seguida recorreran a l'ús del llenguatge algebraic. Creiem que no s'ha de caure en l'error de pensar que una aproximació és més matemàtica que l'altra.

No sembla que en casos com aquest es pugui parlar de traducció, sinó de dues representacions diferents d'un mateix concepte.

A vegades es considera que la representació geomètrica d'una igualtat algebraica és una demostració d'aquesta igualtat i, fins i tot, es parla de demostracions geomètriques. Crec que més aviat s'hauria de considerar que són visions diferents d'una mateixa realitat. Això ens mostra, però, que el llenguatge matemàtic no té un únic alfabet i es pot parlar en modalitats diferents.

Quan el llenguatge matemàtic arriba a un grau de formalització elevat, ens podem arribar a preguntar si hem entrat en un món tancat sense connexions amb el món extern. En aquest sentit, al llenguatge matemàtic li passa una mica com al llenguatge musical o als llenguatges de programació, que a través de codis propis arriben a un nivell en què es perd de vista el punt de partida i les necessitats que els han originat i creen un món on només els experts es mouen amb comoditat.

De totes maneres, el llenguatge matemàtic, com els altres que hem esmentat, sempre ha de ser descodificable i explicable a través de la llengua natural. Si no tens cultura musical, quan veus un pentagrama no entens absolutament res. T'han de donar les claus d'interpretació i dir-te que cada símbol té un valor segons la posició que ocupa i la forma que té, d'una manera una mica semblant a un sistema de numeració. Evidentment, el fet de comprendre com funciona el llenguatge musical no te'n fa un usuari. La familiarització i hores i hores de pràctica és el que te l'acaben fent útil.

En matemàtiques superiors, a vegades aquesta traducció del llenguatge matemàtic a llenguatge natural no és gens senzilla. S'ha arribat a dir que moltes tesis doctorals de matemàtiques només les entenen els qui les fan i, amb sort, el seu director de tesi. Ens haurem de creure, però, que si no ets capaç d'explicar a un profà en la matèria una qüestió és que no l'entens del tot.

4. Activitat del cervell en l'ús del llenguatge matemàtic

Tot i que ja hem vist que el llenguatge matemàtic no té una única modalitat, sí que és cert que quan es fan matemàtiques s'activen, en major o menor mesura, una sèrie de capacitats mentals que podríem dir que són les pròpies de l'ús del llenguatge matemàtic. Algunes serien, per exemple:

Abstracció. Les matemàtiques, tot i tenir aplicacions pràctiques innegables i inspirar-se sovint en aspectes de la realitat són una ciència eminentment abstracta, que treballa amb constructes de la ment humana.

Formalització. La subjecció i l'assumpció d'unes regles formals són imprescindibles quan el llenguatge matemàtic arriba a un nivell que fa necessària la formalització a través de fórmules, símbols, connectors...

Estructuració lògica del raonament. Necessària per al rigor que ha de caracteritzar l'ús del llenguatge en les demostracions que són el procediment que en un grau mes elevat caracteritza l'activitat matemàtica.

Aplicació automatitzada d'algorismes perquè el caràcter operatiu del llenguatge matemàtic no sigui un obstacle al desenvolupament del raonament. Quan s'ha comprès el significat d'un algorisme, s'ha de ser capaç de mecanitzar-ne al màxim possible l'aplicació.

Detectar o establir connexions entre conceptes, sovint aparentment sense relació. A vegades aquestes connexions s'estableixen entre conceptes de branques diferents de la matemàtica. Un dels exemples més rellevants d'aquest tipus de connexions en la història de la matemàtica és el naixement de la geometria analítica, impulsat per René Descartes (1596-1650), que relaciona conceptes geomètrics (*punt*, *recta*, *pla*, *paral·lelisme*, *perpendicularitat*, *distàncies*...) amb conceptes d'àlgebra i de càlcul. Un altre tipus de connexions són les que s'estableixen entre conceptes matemàtics i conceptes externs a la matemàtica. En efecte, la matemàtica sovint extreu o destil·la els seus conceptes a partir d'objectes o sistemes de la realitat física i, d'altra banda, la matemàtica aplicada no consisteix en altra cosa que aplicar coneixements matemàtics a fenòmens de la realitat.

Finalment, no s'ha de menystenir l'aspecte del gaudi estètic en la pràctica de la matemàtica. No és gens estrany que experts en matemàtiques qualifiquin una determinada demostració d'elegant sense que sigui gens fàcil establir d'on procedeix aquesta elegància que, en canvi, suscita una curiosa coincidència de criteris en la qualificació. La qüestió de l'estètica és tan present en les matemàtiques que l'any 1988 la revista *The Mathematical Intelligencer* va convidar els seus lectors a escollir la fórmula més bonica. La vencedora, de manera aclaparadora, va ser l'anomenada *identitat d'Euler*:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

I per què els lectors van considerar tan bonica aquesta fórmula? Segurament perquè conté, en una única igualtat, els dos nombres que es poden considerar seminals, és a dir, aquells a partir dels quals surten tota la resta, i que, a més, són base del sistema binari, que són el zero i l'u, els dos nombres transcendents més importants, e i π, i la unitat imaginària, i.

Naturalment, el gaudi estètic és molt subjectiu i segurament hi haurà qui gairebé s'escandalitzarà que algú pugui trobar bonica una fórmula. És clar que tothom ha de gaudir com bonament li plagui o com bonament pugui i que difícilment trobarem una fórmula que determini amb què ha de gaudir cadascú.