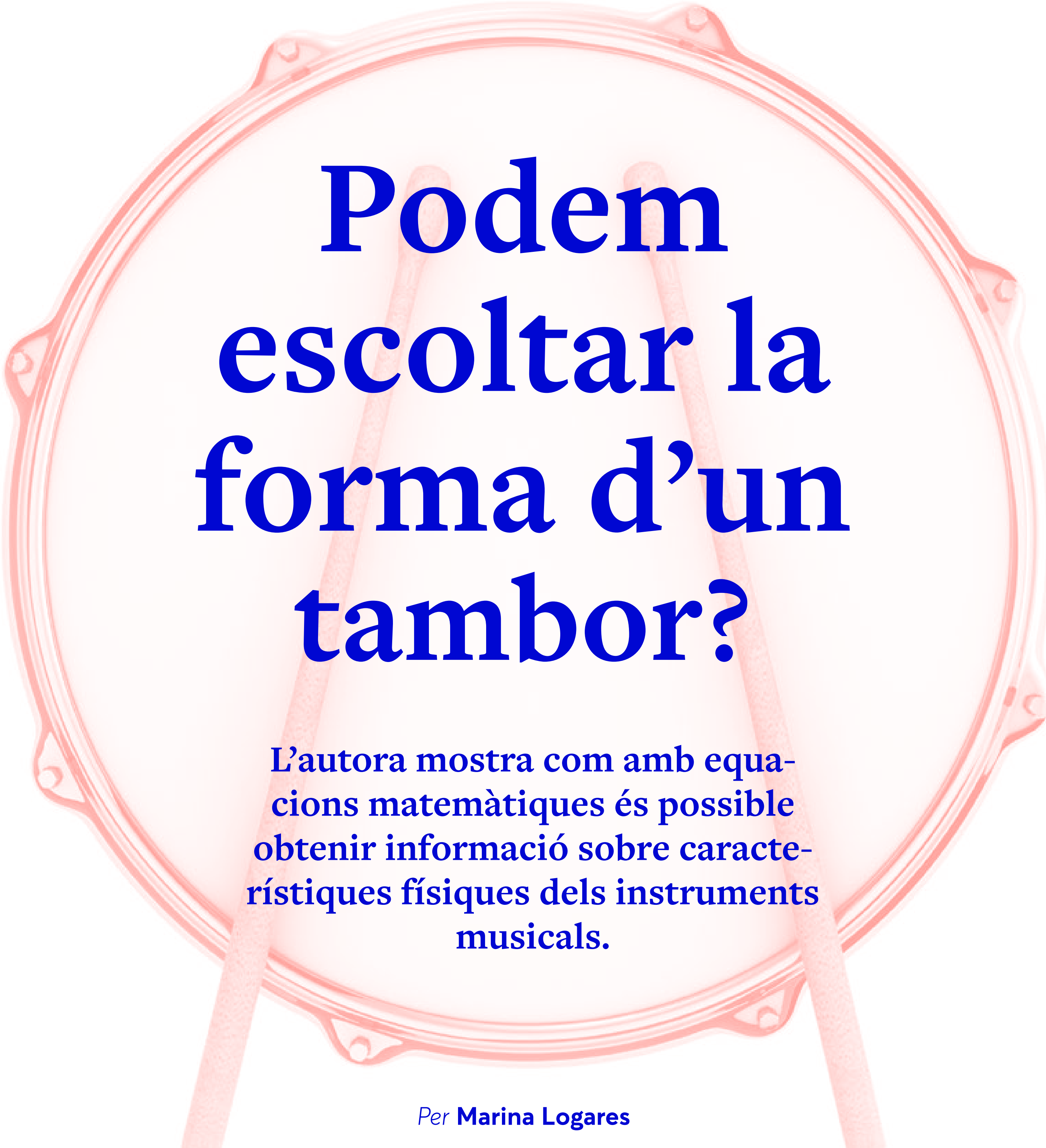


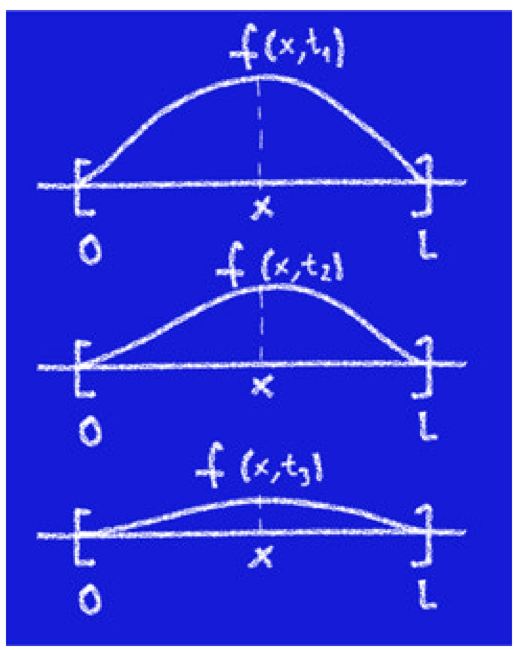
Podem escoltar la forma d'un tambor?

L'autora mostra com amb equacions matemàtiques és possible obtenir informació sobre característiques físiques dels instruments musicals.

Per **Marina Logares**

«Començarem, doncs, entenent quanta informació podem saber d'un instrument musical només escoltant-lo.»

El matemàtic polonès Mark Kac va llançar el 1966 aquesta pregunta a la comunitat matemàtica: podem escoltar la forma d'un tambor? La pregunta pot semblar una autèntica bogeria: tret del cas d'habilitats sinestèsiques, veiem formes i escoltem melodies. Però si la simplifiquem matemàticament, podrem veure que és una pregunta perfectament vàlida. Començarem, doncs, entenent quanta informació podem saber d'un instrument musical només escoltant-lo. Això sí, suposarem que estem entre les persones —enormement afortunades: una entre deu mil!— que tenen una oïda perfecta.



Començarem, doncs, amb el que matemàticament s'anomena el model unidimensional del nostre problema; és a dir, ens preguntarem si podem escoltar la forma de la corda, per exemple, d'una guitarra. Però què volem dir amb la forma de la corda d'una guitarra? Com que es tracta d'una corda, poca cosa més podem dir de la seva forma que la seva longitud. En tot cas, podríem parlar del material (i, per tant, la densitat) amb què està fabricada, així com de la tensió amb què ens la trobem, però són propietats físiques que per simplificar la nostra anàlisi obviarem. És a dir, per a l'arma de la geometria només ens interessarà com a «forma» la longitud de la corda.

Imaginem que disposem d'una corda de longitud desconeguda i que, per tant, la denotem amb la lletra L. La nostra corda de guitarra està fixada als seus extrems a la clavilla i al pont, però a l'hora de mesurar la corda ens adonem que L és realment la distància entre el pont i la celleta, ja que aquests són els punts on la corda no es mou mai. La nostra corda està representada, matemàticament parlant, per l'interval $[0,L]$. La pregunta aleshores és: sabrem determinar la longitud de la corda si l'escoltem sonar? I, al revés: determinarà la longitud de la corda el so? La resposta a la segona pregunta és el primer que s'aprèn en un curs de guitarra: en trepitjar amb un dit els diferents trasts, obtenim diferents notes en copejar la corda. D'aquesta manera, la segona pregunta obté un sí rotund. Amb diferents longituds de la corda, obtindrem diferents notes musicals o, el que és el mateix, diferents freqüències.

Posem fil a l'agulla. Les vibracions de la nostra corda les representarem mitjançant una funció: $f(x, t)$. La funció ens diu quant es desplaça verticalment la corda a cada punt x de l'interval $[0,L]$ i a cada moment del temps t.

Recordant que els extrems de la corda estan fixos (i la corda, tensa), trobem dues condicions que ha de complir la nostra funció $f(x, t)$ i que són $f(0, t) = 0$ i $f(L, t) = 0$ en tot moment t, ja que el punt 0 i el punt L són els nostres extrems de l'interval.

D'altra banda, sabem que una corda vibrant ha de satisfer l'equació d'ones, és a dir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

on μ és un nombre real que representa la densitat lineal de la corda i T és un altre nombre real que representa la tensió de la corda. Tot i això, per simplificar els càlculs considerarem a partir d'aquest moment que la densitat i la tensió tenen el valor d'una unitat; és a dir: $\mu = T = 1$. El

significat de ∂ consisteix a considerar petits increments de la funció $f(x, t)$ en cada variable, i això es coneix com a derivada parcial de la funció i es llegeix com a «derivada de la funció f respecte a x» o «derivada de la funció f respecte a t»; el 2 significa que aquest procés s'executa dues vegades.

En matemàtiques, les equacions es llegeixen, i això té una raó de ser. La lectura i l'anàlisi aturada d'una equació no només ens ajuden a saber com la resoldrem, sinó que, fins i tot sense resoldre-la, ens donen moltes dades sobre la solució futura. En el nostre cas, la part esquerra de l'equació (1) representa l'acceleració en el punt x, de la qual sabem per la segona llei de Newton que és proporcional a la força emprada per moure la corda. La part dreta de l'equació (1) representa la curvatura de la corba dibuixada per la corda i l'equació ens diu que com amb més força es toca la corda de la guitarra, més es corba la corda (i es pot trencar si es toca amb massa força). Això és fàcilment observable, però hem de pensar en les equacions com la informació que necessitaríem si no haguéssim vist mai una guitarra i ens trobéssim tocant amb una en una habitació a les fosques.

L'equació (1) és, en llenguatge matemàtic, una «equació en derivades parcials» que es resol amb un mètode molt senzill conegut com a mètode de separació de variables. Aquest mètode consisteix primer a considerar que la nostra funció de les variables x i t en realitat està composta pel producte de dues funcions cadascuna d'una sola variable, és a dir:

$$f(x,t) = g(x)h(t), \tag{2}$$

on demanem que $g(0) = g(L) = 0$, de manera que continua complint la condició $f(0,t) = f(L,t) = 0$. Substituint-ho a (1), obtenim:

$$g(x)h''(t) = h(t)g''(x)$$

o, equivalentment, fora dels valors en què g o h s'anul·lin, tenim:

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}. \tag{3}$$

L'equació (3) té una particularitat important: a la part esquerra tenim funcions que només depenen de la variable temporal t, mentre que a la part dreta tenim funcions que únicament depenen de la variable espacial x. El fet d'estar igualades implica que totes dues han de ser una constant que suposarem negativa, és a dir:

$$g''(x) = -\lambda g(x) \tag{4}$$

$$f''(t) = -\lambda f(t), \tag{5}$$

on λ és un nombre real positiu.

Les possibles solucions a (4) són les funcions $\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$, $\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ i les seves combinacions lineals, per la qual cosa de manera més general escrivim $g(x) = Asin(\sqrt{\lambda x}) + Bcos(\sqrt{\lambda x})$ i recordem que ha de satisfer les condicions de contorn abans esmentades, és a dir, $g(0) = 0$. Ara bé, ja que $\cos(0) = 1$ i $\sin(0) = 0$, la condició $g(0) = 0$ implica que $B = 0$, i obtenim:

$$g(x) = Asin(\sqrt{\lambda x}). \tag{6}$$

També sabíem que $g(L) = 0$, és a dir, $A\sin(\sqrt{\lambda}\, L) = 0$, però com que la funció sinus s'anul·la en els múltiples de π, aquesta condició ens diu que:

$$\sqrt{\lambda L} = n\pi.$$

Aquesta darrera expressió és fantàstica!, ens dona que el valor de la constant λ, abans desconeguda, és, doncs:

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L}. \tag{7}$$

D'altra banda i com que ara coneixem λ, podrem resoldre de manera anàloga l'equació (5) i obtindrem:

$$h(t) = Csin(\sqrt{\lambda t}) + Dcos(\sqrt{\lambda t}),$$

on les constants C i D estan determinades per la configu-

«Conèixer la freqüència a què sona una corda és el mateix que conèixer-ne la longitud, és a dir, la seva forma.»

ració inicial i la velocitat de la corda. El període d'aquestes funcions sinusoidals és $2\pi / \sqrt{\lambda}$, per la qual cosa la seva freqüència, la quantitat de vegades que la funció recorre un període complet per unitat de temps, és $\sqrt{\lambda} / 2\pi$. Com que ja coneixem λ, substituint les incògnites pels valors a (7) podem dir que la freqüència de la funció h és $n / 2L$, on n recorre els nombres naturals, de manera que obtenim que les freqüències amb què vibra la corda de la guitarra són $1 / 2L$, $2 / 2L$, $3 / 2L$, etc. La primera freqüència, $1 / 2L$, es coneix com a fonamental, és a dir, el to de la corda que estem estudiant amb la densitat i la tensió que haguem considerat inicialment

I hem resolt la pregunta! Al món unidimensional de les cordes, conèixer la freqüència a què sona una corda és el mateix que conèixer-ne la longitud, és a dir, la seva forma.

Amb aquestes armes tornem, doncs, a la pregunta inicial: què passa amb un tambor? Ara, en lloc de l'interval de la recta real $[0,L]$, tenim una regió del pla que anomenarem D. Les coordenades d'un punt en aquesta regió les denotarem per (x,y). I, igual que fèiem amb la guitarra, ens oblidarem de com fem vibrar aquesta membrana, i de la densitat i la tensió de la membrana.

Representarem el moviment de la membrana per la funció $f(x,y,t)$, que quantifica el desplaçament vertical del punt (x,y) al moment t de la vibració. De nou, a cada moment, $f(x,y,t)$ ens dona la foto del comportament de la membrana en vibrar. La funció f, per tant, satisfà l'equació d'ona en dues variables:

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{\Delta g}{g(x,y)},$$

La membrana del tambor està, per descomptat, fixada amb un cèrcol o similar, que tindrà una forma qualsevol i que és la que volem descobrir, per la qual cosa demanem que $f(x,y,t) = 0$ per a tots els punts (x,t) que estiguin a la vora de la regió D.

Seguint els mateixos passos que abans, assumim que $f(x,y,t) = g(x,y)h(t)$ i arribem a l'equació

$$\frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{\Delta g}{g(x,y)}$$

on $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ es coneix com el *laplacià* de la funció g. De nou, tornem a obtenir una solució per a $h(t)$, però trobar una solució per a

$$\frac{\Delta g}{g(x,y)} = -\lambda$$

és una cosa extremament complicada sense imposar condicions extres a la regió D.

El 1992, C. Gordon, D. Webb i S. Wolpert, usant tècniques de la geometria riemanniana, van construir dos tambors amb formes diferents que sonen igual, responent, doncs, a la pregunta inicial amb un no rotund. Ara bé, encara ens podem preguntar: què podem escoltar del tambor? Hilbert en el seu temps es feia aquesta mateixa pregunta en els mateixos termes matemàtics però per a la radiació de cos negre. El seu estudiant Hermann Weyl va mostrar que el que podem escoltar és l'àrea del tambor. ●