DIDACTICAE | Universitat de Barcelona | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.2017.1.77-96

**MONOGRÁFICO**

Educación matemática para el cambio

# REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DOCENTE COMO ESTRATEGIA FORMATIVA PARA DESARROLLAR EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

Recepción: 15/10/2015 | Revisión: 18/11/2015 | Aceptación: 19/01/2016

**Paola POSADAS**
Universidad de Granada
paolapp@correo.ugr.es

**Juan D. Godino**
Universidad de Granada
jgodino@ugr.es

**Resumen:** Se describe el proceso de reflexión sobre una experiencia de enseñanza realizada en la fase de prácticas de un máster de formación inicial de profesorado de secundaria en la especialidad de matemáticas. La reflexión se realiza aplicando la noción de idoneidad didáctica a las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional del proceso de estudio implementado sobre ecuaciones de segundo grado en tercer curso de educación secundaria. La valoración de la idoneidad didáctica, y la consiguiente identificación de propuestas fundamentadas de cambio para el rediseño de la experiencia, requiere recopilar y sintetizar los conocimientos didáctico-matemáticos producidos en la investigación e innovación sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. Se concluye que la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica ayuda a sistematizar los conocimientos didácticos y su aplicación a la reflexión y mejora progresiva de la práctica de la enseñanza.

**Palabras clave:** educación matemática; formación de profesores; educación secundaria; idoneidad didáctica; ecuaciones cuadráticas.

## *REFLECTING ON THE TEACHING PRACTICE AS A TRAINING STRATEGY TO DEVELOP DIDACTIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE*

***Abstract:*** *We describe the analysis of a teaching experience carried out by a secondary school mathematics trainee during her student teaching. We apply the notion of didactical suitability to the epistemic, ecological, cognitive, affective, interactional and mediational facets of the teaching and learning process on quadratic equations during the third year of secondary school (14-15 year olds). The evaluation of the process didactical suitability, and the subsequent identification of founded proposals to redesign the experience, requires collecting and synthesizing the metacognitive-mathematical knowledge produced in research and innovation on teaching and learning quadratic equations. We conclude that the application of the didactic suitability criteria helps to systematize metacognitive knowledge and its application in order to reflect on, and progressively improve, teaching practice.*

***Keywords:*** *mathematics education; teachers' education; secondary school; didactical suitability; quadratic equations.*

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

## Introducción

Una tarea esencial del profesor es la preparación de sus clases, teniendo en cuenta las competencias, objetivos, y contenidos que debe desarrollar en sus estudiantes, así como las restricciones del contexto en el que tiene lugar la enseñanza. Por este motivo, la formación inicial de los profesores contempla la adquisición de destrezas en el diseño de unidades didácticas, como estrategia de preparación del profesor. Al mismo tiempo, la realización de las prácticas de enseñanza en los centros de enseñanza es una ocasión crucial para entrar en contacto con la realidad educativa, tomar conciencia de las múltiples restricciones que el contexto en el que tiene lugar la enseñanza impone al trabajo del profesor, así como de aplicar y desarrollar los conocimientos teóricos recibidos. El futuro profesor toma conciencia de que es necesario adoptar una posición reflexiva y autocrítica sobre el propio trabajo, a fin de reconocer aquellos puntos sobre los que es necesario actuar para lograr una mejora progresiva de la enseñanza.

Las anteriores reflexiones nos han llevado a enfocar el trabajo de fin de máster de uno de los autores hacia una reflexión sistemática sobre la experiencia vivida en la fase de prácticas, en la que tuvo la oportunidad de asumir la responsabilidad de la enseñanza de un tema bajo la supervisión del profesor tutor (segundo autor). Esta reflexión sistemática se apoya en la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad desarrollados en diversos trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, 2011). La finalidad es obtener criterios para el rediseño de la unidad didáctica que permitan introducir cambios fundamentados en la enseñanza del tema correspondiente, en nuestro caso el estudio de la ecuación cuadrática en 3º de Educación Secundaria Obligatoria.

En este artículo describimos el proceso formativo realizado por la primera autora, bajo la supervisión y apoyo del segundo autor, enfatizando el papel de la noción de idoneidad didáctica como instrumento de reflexión sistemática sobre la propia práctica[1].

Organizamos el artículo en los siguientes apartados. Tras esta introducción general, en la sección 2 describimos el problema de indagación y el marco teórico mediante el cual se aborda. En la sección 3 describimos la experiencia de enseñanza de la ecuación cuadrática realizada en la fase de prácticas en un instituto en un grupo de 3º de ESO. Se realiza una breve descripción del grupo en el cual se ha impartido la unidad, el tipo de enseñanza aplicada, así como una síntesis de la evaluación de los aprendizajes logrados por los estudiantes. Dado que la emisión de un juicio fundamentado sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza-aprendizaje requiere establecer previamente un marco de referencia, en la sección 4 hemos sintetizado los principales resultados de investigaciones e innovaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje del tema tratado. Apoyados en esta síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos presentamos en la sección 5 la valoración de la idoneidad didáctica de la experiencia de enseñanza descrita en la sección 3 así como algunas propuestas de cambio. En la última sección hacemos una síntesis del trabajo, resaltando algunos criterios para la revisión del diseño e implementación de la unidad didáctica experimentada.

1 Una versión ampliada de este trabajo se desarrolla en Posadas (2013).

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

## 1. Problema y marco teórico

Como indican Godino y Batanero (2009), el valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Schön (1983) describió la reflexión como «una continua interacción entre el pensamiento y la acción» (íbid: 281); y describió al «práctico reflexivo» como la persona que «reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura» (íbid: 50).

En trabajos recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de «Reflexión guiada» como un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o «guía») mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo. También en el campo de la formación de profesores se encuentran referencias en las que se informan de investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de «reflexión guiada» (Nolan, 2008).

En nuestro caso vamos a aplicar como herramienta o guía para la reflexión la noción de idoneidad didáctica. Esta noción teórica, sus dimensiones, criterios, y desglose operativo, han sido introducidas en diversos trabajos (Godino, Contreras, y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2007; Godino, 2011) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La idoneidad didáctica tiene en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva, interaccional-mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes (Godino, 2011):

1. *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

2. *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

3. *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

4. *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

5. *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

6. *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.

El problema que abordamos en este trabajo lo podemos formular en los siguientes términos:

1) ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado experimentado durante el periodo de prácticas en 3º de ESO descrito en la sección 3?

2) ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica se establece que para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las investigaciones e innovaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Esto nos lleva a plantearnos una cuestión previa:

3) ¿Cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones previas realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado?

## 2. Descripción de una experiencia de enseñanza de la ecuación cuadrática

Durante el periodo de prácticas se tuvo la oportunidad de observar cómo funciona un centro educativo y participar, por primera vez, como docente en varios grupos y temas; pero ha sido en 3º de ESO donde se asumió un cierto grado de responsabilidad de la enseñanza. Esta es la razón por la cual la reflexión sobre la práctica docente vivida la centraremos en este curso, y el contenido matemático que en las semanas correspondientes se debería estudiar.

### 2.1. El grupo clase

La unidad didáctica se ha impartido en una clase de 3º de ESO. Se trata de un grupo heterogéneo de 29 alumnos (16 chicos y 13 chicas). Es un grupo bastante diverso en cuanto a factores sociales se refiere. Aun así, estas diferencias sociales no influyen en el trabajo diario. La motivación y la actitud frente a la asignatura fueron más bien negativas por parte de un pequeño número de alumnos. El resto del grupo, aproximadamente el 70%, mostró una actitud positiva en el aula e interés por la asignatura. En cuanto a las potencialidades de aprendizaje, fue un grupo donde hubo varios niveles. Los estudiantes tuvieron, en general, dificultades de aprendizaje, a excepción de unos pocos alumnos con alto rendimiento académico.

La relación profesor-alumno fue asimétrica, quedando bien definida la figura del profesor como autoridad. A pesar de ello, el trato entre profesor y alumno fue muy cercano. Los alumnos asumieron las normas de la clase de matemáticas de una manera correcta. La mayoría de ellos, cumplieron con los horarios y con las reglas propias de la clase (ocupando su asiento correspondiente asignado por la tutora, participación, realización de tareas, traer la libreta y el libro, apuntes ordenados, etc.) sobre todo aquellos con interés por comprender las explicaciones respondieron de forma positiva, participando activamente en clase y realizando las tareas propuestas.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

### 2.2. Diseño de la unidad didáctica

#### 2.2.1. Marco curricular

Los contenidos relacionados con este tema están recogidos en el documento curricular (MEC, 2007: 31797-31799). Dentro de los seis bloques en que se divide el contenido matemático las ecuaciones de segundo grado se encuentran dentro de los contenidos del tercer curso de ESO, en el Bloque de Álgebra. Dichos contenidos son los siguientes:

- Resolución de ecuaciones de segundo grado. Discusión según resultados obtenidos.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, comprobando que la solución cumple las condiciones del enunciado del problema.
- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

En los criterios de evaluación se indican:

- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para:

- Aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas.
- Combinar la resolución algebraica con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.
- Contrastar y discutir los resultados obtenidos.

El campo de la resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado consiste en resolver problemas numéricos y geométricos. En el segundo caso, se calculan áreas, perímetros o se aplica el Teorema de Pitágoras (para calcular el lado de un triángulo rectángulo). Los conocimientos previos que se requieren para el estudio de las ecuaciones de segundo grado son:

- Operaciones con fracciones.
- Raíces exactas.
- Operaciones con polinomios.
- Identidades notables.
- Descomposición en factores.
- Teorema de Pitágoras.

En el Bloque de Álgebra de 3º de ESO se estudian operaciones con polinomios, identidades notables y descomposición en factores, aunque en temas anteriores al de nuestra unidad didáctica. Igualmente, los alumnos deberán comprender estos contenidos para aplicarlos a la hora de resolver ecuaciones de segundo grado. Además, es necesario que los alumnos recuerden el teorema de Pitágoras, para utilizarlo en la resolución de algunos problemas. El teorema de Pitágoras aparece en el curso anterior, en el Bloque de Geometría de 2º de Educación Secundaria Obligatoria.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

### 2.2.2. Objetivos. Competencia matemática

Con esta unidad didáctica se pretende que los alumnos alcancen los siguientes objetivos:

- Resolver ecuaciones de segundo grado.
- Justificar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Resolver problemas mediante ecuaciones de segundo grado.
- Ajustar la solución al enunciado del problema.

Estos objetivos se orientan a alcanzar una de las competencias básicas, la competencia matemática. Esta supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos. El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva a utilizar espontáneamente –en los ámbitos personal y social– los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones.

> En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad (MEC, 2007: 31689).

### 2.2.3. Contenidos, actividades y secuenciación

La unidad didáctica se ha distribuido en siete sesiones donde, además de las explicaciones, se han hecho ejercicios, se ha realizado una prueba de evaluación formativa, para así ver si los alumnos han comprendido cómo resolver los distintos tipos de ecuaciones de segundo grado, y un examen sobre los contenidos del bloque de álgebra, incluyendo las ecuaciones cuadráticas. A continuación, se detalla la distribución de la materia en las sesiones:

Sesión 1: Forma general de una ecuación de segundo grado; Fórmula para obtener la solución; Ejemplos; Discriminante y número de soluciones; Ejercicio del libro propuesto para hacer en clase.

Sesión 2: Corrección del ejercicio propuesto en clase el día anterior; Repaso de lo explicado anteriormente; Ecuaciones de segundo grado incompletas; Solución; Ejemplos; Ejercicios del libro propuestos para casa. En los últimos 25 minutos de clase, la profesora tutora resolvió varios problemas mediante ecuaciones de primer grado.

Sesión 3: Corrección de los ejercicios propuestos en clase el día anterior; Pasos para resolver una ecuación de segundo grado; Ejemplos; Ejercicios del libro propuestos para casa; Evaluación escrita para observar si están comprendiendo los contenidos.

Sesión 4: Corrección de los ejercicios propuestos en clase el día anterior; Resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado; Ejercicios del libro propuestos para casa (para que practiquen en la resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado); Reparto la evaluación con correcciones y anotaciones acerca de los errores que han cometido los alumnos.

Sesión 5: Corrección de los problemas; Comienzo del nuevo tema.

Sesión 6: Repaso de contenidos de los dos últimos temas y ronda de dudas.

Sesión 7: Examen.

El libro de texto seguido en las clases (Colera, Gaztelu & Oliveira, 2010) propone el estudio de la ecuación de segundo grado enfocado al aprendizaje de la fórmula para hallar las raíces para el caso general ax2+bx+c=0, como se muestra en la figura 1. Una vez presentada la fórmula su uso se ilustra con un ejemplo particular, seguido de ejercicios resueltos y actividades. Se considera que la justificación de dicha fórmula es un proceso «largo y complicado».

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para despejar la $x$, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

**Número de soluciones**

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de $\Delta$:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay **una solución:** $x = \frac{-b}{2a}$. Se llama **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Figura 1. Resolución de la ecuación cuadrática en el libro de texto.

Se sigue un proceso que va de la expresión general, que implica el uso de variables (incógnita y parámetros), a su aplicación a casos particulares mediante la asignación de valores numéricos a los parámetros. En el caso de las ecuaciones incompletas (sin la presencia de término lineal o constante) se introducen con un ejemplo la resolución mediante el despeje del término cuadrático (caso b=0), o mediante factorización (caso c=0) (Figura 2).

a resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fór
ıla general, pues se puede despejar $x$ con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

**ıaciones sin término independiente, $ax^2 + bx = 0$**

a resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar l
mula general, pues se puede sacar factor común la $x$ e igualar a cero cad
ɔ de los dos factores:

$$(ax + b) \cdot x = 0 \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = -\frac{b}{a},\ x_2 = 0$$

Figura 2. Ecuaciones cuadráticas incompletas.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

Se observa, por tanto, que los autores del libro enfatizan una visión de las matemáticas como «reglas a seguir», ilustradas con ejemplos de cómo interpretar tales reglas, seguidas de ejercitación para el dominio de la aplicación de las mismas. La resolución de problemas verbales que requieren la puesta en ecuación sigue la misma pauta, como se ve en la figura 3.

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

**1.** Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
**2.** Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
**3.** Resolver la ecuación.
**4.** Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Figura 3. Resolución de problemas.

### 2.3. Implementación del estudio

Las clases suelen comenzar corrigiendo las tareas que los alumnos llevaban para casa y con un recordatorio de lo que se estudió en la clase anterior. Se pregunta a los alumnos las dudas que se les han presentado para hacer hincapié en ellas y afianzar los conocimientos. Posteriormente, se comienza a explicar la materia nueva. Durante la explicación de cada nuevo concepto la profesora iba haciendo preguntas sobre conocimientos previos para que los alumnos siguieran la explicación. Además, se pone atención en los errores y dificultades que puedan surgir a los alumnos. Por último, para fomentar el trabajo personal y un mayor grado de consecución de objetivos, cuando se acerca el final de la clase, normalmente se proponía una serie de ejercicios para que los hicieran en casa. Dichos ejercicios estaban relacionados con la materia vista para que asentaran los conocimientos, y se corregían al comienzo de la siguiente clase.

La introducción a la unidad se realiza a través de problemas sencillos, aumentando la dificultad de forma gradual. En todo momento se ha seguido el orden y los contenidos del libro de texto como guion, de modo que los alumnos puedan acceder con facilidad a la materia, aunque en algunos casos se propusieron ejemplos que no aparecen en el libro.

Las ecuaciones de segundo grado (completas) fueron introducidas mediante su expresión general. Se trabajó la identificación de los coeficientes a partir de una expresión, la fórmula para obtener la solución (o las soluciones), poniendo énfasis en la utilización del doble signo que aparece en ella, y el número de soluciones (dos distintas, una doble o ninguna) según el signo de su discriminante.

Se realizaron bastantes ejemplos en los que los alumnos indicaban cuáles eran los coeficientes de la ecuación y cómo se sustituían en la fórmula para calcular sus soluciones. De hecho, al finalizar la clase, los alumnos comentaron que habíamos realizado muchos ejemplos y me afirmaron que habían comprendido cómo aplicar la fórmula. Al día siguiente, cuando procedimos a resolver los ejercicios propuestos para casa, se comprobó que los chicos habían realizado la tarea y no plantearon problemas.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.

Posteriormente, se vio cómo aplicar unos procesos más simples para las ecuaciones de segundo grado en las que falta alguno de sus términos (es decir, las ecuaciones incompletas), sin necesidad de aplicar la fórmula. El alumnado presentó dificultades para comprender este proceso, por lo que realizamos varios ejemplos de cada tipo hasta que se observó que los alumnos se familiarizaron con el proceso de extraer factor común cuando la ecuación no tiene término independiente y de tomar la raíz cuadrada (sin olvidar el doble signo) cuando la ecuación no tiene término en x.

A continuación, se muestra a los alumnos los pasos para resolver ecuaciones de segundo grado con una fisonomía complicada, su expresión no se presenta en la forma general, sino que deberán «arreglarlas», suprimiendo denominadores y paréntesis, reduciendo términos semejantes, transponiendo términos, etc. Este proceso no les significó mucha dificultad, ya que el proceso es similar al proceso de resolución de ecuaciones de primer grado con un aspecto parecido.

Durante la implementación de la unidad, se insistió mucho en la importancia de los signos a la hora de resolver las ecuaciones. También se trabajó la relación entre las ecuaciones de segundo grado y la descomposición en factores; es decir, aplicar las identidades notables o extraer factor común. Por ejemplo, se realizó el siguiente ejercicio:

*Resuelve igualando a cero cada uno de los factores:*

| | | |
|---|---|---|
| a) $x(3x - 1) = 0$ | c) $(x + 1)(x + 3) = 0$ | e) $(x - 5)^2 = 0$ |
| b) $3x(x + 2) = 0$ | d) $(x - 5)(x + 5) = 0$ | f) $(2x - 5)^2 = 0$ |

Después de corregir este ejercicio se comprueba que si desarrollamos estos productos, efectivamente, se obtiene una ecuación de segundo grado. También, se hicieron unos pocos ejemplos del caso inverso: cómo obtener una ecuación de segundo grado a partir de dos soluciones dadas. Se recordó la utilización de las identidades notables y la descomposición en factores, que ya habían estudiado, para resolver este tipo de ejercicios.

Finalmente, para estudiar las aplicaciones, se realizaron problemas que requieren el uso de las ecuaciones de segundo grado para su resolución, en donde se mostraba la aplicación de éstas.

En cuando a la manera de trabajar en la clase, se realizaron de forma individual algunos ejercicios en el aula relacionados con la explicación, aunque se les permitía comentar el ejercicio con el compañero. Mientras, la profesora resolvía dudas a los alumnos individualmente. Después, el ejercicio era corregido en la pizarra; eran los alumnos quienes indicaban los pasos necesarios y la profesora los escribía en la pizarra. También, se comentaban los errores más comunes que presentan los ejercicios para que, así, aprendieran de ellos.

### 2.4. Evaluación de los aprendizajes logrados

Finalizado el estudio del tema los alumnos realizaron un examen sobre el bloque de álgebra, que abarcaba tres temas: «El lenguaje algebraico», «Ecuaciones» y «Sistemas de ecuaciones». El examen fue aprobado por el 58% de los alumnos. Para evaluar si los alumnos comprenden el proceso de resolución de ecuaciones de segundo grado se propusieron las cuestiones del Cuadro 1:

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $4(x^2 - 3) + x(x - 2) = x^2 - 15$

c) $\frac{x^2 + 1}{3} - x = \frac{x^2 - 4}{6} + 1$

Resuelve los siguientes problemas (1) y (2):

Problema (1):

Un agricultor planta 2/5 de su huerta de alubias y 3/10 de tomates.
Si aún tiene 240 $m^2$ sin plantar, ¿cuál es la extensión de la huerta?

Problema (2):

En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcula la longitud de los tres lados.

Cuadro 1: Examen final.

Los alumnos tenían que resolver 5 cuestiones sobre ecuaciones de segundo grado, 3 que requerían hallar las soluciones y dos que implicaban el planteamiento y resolución de una ecuación lineal y otra cuadrática. Asignando dos puntos si la respuesta era correcta, 1 parcialmente correcta y 0 si no era respondida o se hacía de manera incorrecta, cada alumno podía tener una puntuación total de 10 puntos.

La figura 4 incluye la distribución de frecuencias de dicha puntuación total. El total de alumnos que respondieron a las preguntas del examen fue de 29, la puntuación mediana, 4, 4 alumnos obtuvieron una puntuación de 0 y 1 de 10.

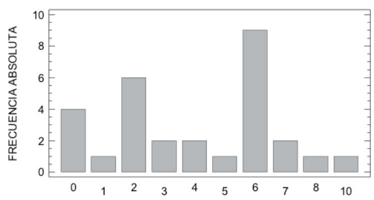


Figura 4. Distribución de frecuencias de la puntuación total.

A continuación, se muestran algunas respuestas erróneas dadas por los chicos en las tareas a), b) y c).

*Errores cometidos en el apartado a):*

1. Error al operar para calcular la raíz (solución dada por tres alumnos):

$x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow a = 1, b = 3, c = -4$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \ldots\ldots$$

2. Toma los coeficientes positivos:

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \ldots\ldots$$

3. Fórmula errónea y error al operar para calcular la raíz:

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-9 - 16}}{2} \ldots\ldots$$

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.

*Errores cometidos en el apartado b):*

1. Errores de cálculo al aplicar la propiedad distributiva y operar con números negativos:

$$4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow 4x^2-12+2x-2x=x^2-15$$
$$\Rightarrow 4x^2+2x-2x-x^2=-15+12 \Rightarrow 3x^2=-27 \Rightarrow x=\frac{-27}{3x^2}$$

2. Toma los coeficientes positivos. Por lo que el resultado al aplicar la fórmula es erróneo.

$$4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow 4x^2-2x+3=0 \rightarrow a=4,\ b=2,\ c=3\ldots\ldots\ldots$$

3. No ordenar la ecuación en la forma general, lo que da lugar a identificar de forma errónea los coeficientes. Esto implica que al aplicar la fórmula el resultado es erróneo.

$$4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow 4x^2+3-2x=0 \rightarrow a=4,\ b=3,\ c=-2\ldots\ldots\ldots$$

*Errores cometidos en el apartado c):*

Algunas soluciones dadas por los estudiantes, que revelan sus dificultades con la simplificación de expresiones fraccionarias, han sido las siguientes:

1.

$$\frac{x^2+1}{3}-x=\frac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{6}-\frac{x}{6}=\frac{x^2-4}{6}+\frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$3x^2+3-x=x^2-4+1 \Rightarrow 3x^2-x-x^2=-4+1+3 \Rightarrow x^2=-6 \Rightarrow x=\frac{-6}{1}$$

2.

$$\frac{x^2+1}{3}-x=\frac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow 3x^2+3-x=6x^2-24+1\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x^2+1}{3}-x=\frac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow 2(x^2+1)-x=x^2-4+1\ldots\ldots\ldots$$

## 3. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre las ecuaciones cuadráticas

Como se ha indicado, el objetivo del proceso formativo fue llevar a la futura profesora a un análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido, orientado hacia la identificación de propuestas de cambio fundamentadas. Para ello, se le pidió en primer lugar, que realizase una recopilación y síntesis de las principales investigaciones e innovaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática, para construir un fundamento que orientase su reflexión. Con ayuda del tutor se identificaron, sintetizaron y clasificaron los conocimientos didáctico-matemáticos sobre las ecuaciones de segundo grado de acuerdo a las facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

En este apartado incluimos los principales resultados de dicha síntesis que serán usados como apoyo para valorar de manera fundamentada la idoneidad didáctica de la experiencia de enseñanza descrita en la sección 3. Una versión más amplia de esta síntesis se incluye en Posadas (2013).

### 3.1. Faceta epistémica

El artículo de Hanna y Barbeau (2008) aporta criterios relevantes sobre la faceta epistémica del contenido matemático, al relacionar el estudio de estas ecuaciones con técnicas matemáticas cuyo dominio por los estudiantes se considera muy significativo. Consideran siguiendo a Rav (1999: 6), que la «esencia de las matemáticas reside en inventar métodos, herramientas, estrategias y conceptos para resolver problemas», por lo cual centran la atención en explorar las consecuencias de esta tesis para la educación matemática. En particular, ponen de manifiesto que las demostraciones o pruebas deberían ser el foco primario de interés, porque son las portadoras del conocimiento matemático incorporado en los métodos, herramientas, estrategias y conceptos puestos en juego en las mismas. Estas ideas son ejemplificadas en este artículo para el caso de la fórmula cuadrática. Los autores aportan argumentos convincentes de que el estudio de las ecuaciones cuadráticas puede permitir introducir técnicas matemáticas valiosas, más allá de la mera justificación de la fórmula general que permite hallar las soluciones de dichas ecuaciones. Reconocen que usualmente los estudiantes aprenden a usar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas particulares, aplicándola ciegamente, sin darse cuenta que pueden comprobar las soluciones sustituyendo los valores en la ecuación. Al hacer tales sustituciones, con una base empírica, llegarán a confiar indudablemente en la fórmula y a aplicarla mecánicamente, pero la fórmula funciona como una caja negra. Una discusión de cómo se obtiene la fórmula nos lleva a cuestiones de estrategia. En vez de preguntar, ¿Cuál es una fórmula para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática?, sería preferible preguntar, ¿Cómo podemos resolver una ecuación cuadrática? Esta segunda cuestión nos induce a pensar sobre procesos más que sobre productos, y considerar cómo podemos comenzar.

La consideración de la demostración tiene beneficios que van más allá de la mera validación de una fórmula. En este caso, ganamos la percepción de reducir la situación general a un tipo canónico, la comprensión de cómo el carácter de las raíces depende de los coeficientes, la seguridad de que la ecuación cuadrática no puede tener más de dos raíces. Ganamos el conocimiento de una técnica genérica cuyo rango de aplicabilidad es más general que la situación dada, y el conocimiento más amplio de que las ecuaciones cuadráticas pueden ser conectadas con un todo más comprensivo.

### 3.2. Faceta cognitiva

El artículo de Vaiyavutjamai y Clements (2006), aporta conocimientos relevantes sobre la faceta cognitiva implicada en los procesos de estudio de las ecuaciones cuadráticas en educación secundaria. Se informa de los resultados de una investigación realizada en seis clases de dos escuelas de Tailandia en la que se evalúa el impacto de un tipo de enseñanza tradicional sobre el aprendizaje de estudiantes de noveno grado sobre la ecuación cuadrática. Tanto el tema, el estilo de enseñanza aplicado y el nivel educativo tienen grandes similitudes con nuestra experiencia de enseñanza.

El artículo responde a la necesidad de tomar conciencia de los efectos de un estilo de enseñanza sobre el aprendizaje de los estudiantes cuando el énfasis se pone en la manipulación de

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

símbolos y con menor atención a los significados de los símbolos. Se comienza reconociendo que ha habido menos investigación sobre este tema que sobre otros relacionados con el aprendizaje del álgebra (p.e., las ecuaciones lineales). Las dificultades que tienen los estudiantes en aprender a resolver ecuaciones cuadráticas no son parte del conocimiento pedagógico del contenido de los profesores de matemáticas de secundaria, ni tampoco de los autores de libros de texto o artículos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Usualmente el pensamiento del estudiante en estos contextos parece estar dominado por la necesidad de lograr dominio procedimental, y usualmente sin garantía de que se logre comprensión relacional (Skemp, 1978). Hay evidencias de que el tipo de enseñanza tradicional, básicamente expositiva en las clases de matemáticas, enfatiza las destrezas de cálculo y falla en llamar la atención sobre las conexiones. Un énfasis excesivo en las destrezas es probable que resulte en un sacrificio de la comprensión y en la construcción de conocimiento conceptual.

El análisis de los datos obtenidos en esta investigación reveló que muchos entrevistados que obtuvieron soluciones correctas de hecho tenían serias concepciones incorrectas sobre lo que realmente es una ecuación cuadrática. Sus respuestas eran correctas pero, desde un punto de vista matemático, no sabían de lo que estaban hablando. Dar respuestas correctas a una prueba tradicional de papel y lápiz sobre ecuaciones cuadráticas meramente sirvió para reforzar sus concepciones incorrectas sobre la naturaleza de una variable en una ecuación cuadrática.

Vaiyavutjamai y Clements (2006), se preguntan si hay formas factibles de enseñanza que permitan a los estudiantes, no solo a los de mayor capacidad, el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, y otros tópicos matemáticos, de una manera relacional Algunos profesores e investigadores educativos piensan que una aproximación de enseñanza que coloca el estudio de las ecuaciones, incluyendo las ecuaciones cuadráticas, dentro del estudio de las funciones –la llamada aproximación «funcional»– es bastante más probable que consiga una comprensión relacional en los estudiantes que la tradicional aproximación expositiva, procedimental, de resolución de ecuaciones, sobre todo si se acompaña con el uso de tecnología como las calculadoras gráficas. Los autores concluyen con la propuesta de posponer el estudio de las ecuaciones cuadráticas a cursos posteriores al 9º.

> El fallo bien documentado de muchos –casi con seguridad la mayoría de los estudiantes de secundaria en el mundo– de enfrentarse a las demandas de las ecuaciones cuadráticas sugiere que los diseñadores del currículo deberían retrasar la inclusión de las ecuaciones cuadráticas en los currículos hasta el Grado 10, Grado 11, o Grado 12 (íbid: 73-74).

La investigación de Didiş, Baş y Erbaş (2011) se centra en la evaluación de la comprensión relacional de la ecuación cuadrática en estudiantes de 10º grado. El estudio se diseñó para describir el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas con una incógnita, en particular cuando usan la técnica de factorización. Informan que los estudiantes intentan resolver las ecuaciones de la manera más rápida posible, sin fijar la atención en sus estructuras y significado conceptual. Reconocen que los profesores juegan un papel importante para estimular el aprendizaje relacional. El conocimiento de las dificultades de los estudiantes sobre las ecuaciones cuadráticas debería ser una parte importante del conocimiento pedagógico del contenido de los profesores.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.

### 3.3. Faceta instruccional

En Radford y Guerette (1996) se describe una secuencia de tareas centradas en la resolución de problemas geométricos relacionados con rectángulos y cuadrados, con el fin de que los estudiantes inventen la fórmula que resuelve las ecuaciones de segundo grado. Describen una secuencia de tareas para que los estudiantes las realicen en grupos de trabajo cooperativos, así como usando recursos gráficos y manipulativos.

Este enfoque tiene como objetivo proporcionar un marco útil para ayudar a los estudiantes a desarrollar un sentido de los símbolos. El uso de manipulativos y técnicas geométricas para derivar la fórmula que permite hallar las raíces de la ecuación cuadrática fueron apreciadas por los estudiantes de secundaria. Los autores mencionan que el paso de los números a las letras no es, sin embargo, una transcripción simple. Las experiencias implementadas incluyen una etapa de generalización y de reorganización de las acciones que permite una descripción mucho más amplia de los objetos matemáticos.

Un enfoque geométrico y funcional del estudio de las ecuaciones cuadráticas usando tecnología es descrito en Galván (2006). El proceso a seguir en el aula para el estudio de la variación del perímetro de los rectángulos de igual área y la construcción geométrica de éstos, conduce hacia la resolución geométrica de ecuaciones de segundo grado, haciendo uso de un programa de geometría interactivo. Las actividades elaboradas por Galván (2006), podrían trabajarse con alumnos de 4º de ESO, preferiblemente en un aula donde cada alumno pueda disponer de un ordenador, o bien trabajando en grupos de tamaño reducido. El momento más adecuado podría ser como ampliación en el estudio de ecuaciones de 2º grado. Galván resalta que el proceso de resolución de ecuaciones de segundo grado desde la geometría podría utilizarse en la enseñanza con el objetivo de mostrar las conexiones entre la geometría, el análisis y el álgebra, lo cual ayuda a una mejor comprensión de las matemáticas.

### 3.4. Faceta ecológica/curricular

En los Principios y Estándares 2000 del NCTM (2000) se hace referencia al estudio de las funciones cuadráticas en los niveles de «high school» (grados 9-12). En estas orientaciones curriculares no se menciona el tema de la resolución de las ecuaciones de segundo grado, sino que se incluyen propuestas para su tratamiento en conexión con las funciones cuadráticas. Concretamente en el estándar de álgebra se indica que los alumnos de Secundaria deberían tener experiencias interesantes explorando las propiedades de diferentes tipos de funciones. Por ejemplo, deberían aprender que la función f (x) = x2 - 2x - 3 es cuadrática, que su gráfica es una parábola y que ésta es «abierta hacia arriba» porque el coeficiente de x2 es positivo. Deberían también llegar a saber que algunas ecuaciones cuadráticas carecen de raíces reales, y que esta característica corresponde al hecho de que sus gráficas no cortan al eje de abscisas. Y deberían ser capaces de determinar las raíces complejas de tales ecuaciones.

Así mismo se considera que ser capaz de operar con símbolos algebraicos es también importante, porque la habilidad para transformar expresiones algebraicas capacita para expresar las funciones en formas que revelen distintos tipos de información sobre ellas. Por ejemplo, dada la función cuadrática f x) = x2 - 2x- 3, algunas de cuyas propiedades gráficas fueron discutidas antes,

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

los alumnos deberían ser capaces de expresarla en la forma f(x) = (x -1)2- 4, en la que se puede identificar fácilmente el vértice de la parábola. Igualmente, deberían saber darle la forma f(x) = (x-3)(x + 1), que permite deducir inmediatamente que las raíces son x = 3 y x = - 1 (NCTM, 2000: 305).

Las orientaciones curriculares del MEC (2007) hacen una mención a las ecuaciones de segundo grado en el curso de 3º de ESO, las cuales son concretadas por los autores de libros de texto de maneras muy diferentes. Colera et al. (2010) hacen una presentación desarrollando el tema de una manera básicamente procedimental. Se presenta la fórmula para hallar las soluciones sin ninguna justificación, seguida de explicaciones del uso y aplicación de la fórmula. El tratamiento dado al tema por otros autores, como la colección del Proyecto Sur (Pérez et al., 1999), es muy diferente. Toman la opción de presentar el tema en 4º curso y no en 3º; además comienzan la discusión de ejemplos particulares de ecuaciones cuadráticas desarrollando técnicas progresivas de factorización y completación de cuadrados. Finalizan el estudio de la resolución general de la ecuación cuadrática justificando la fórmula.

## 4. Valoración de la idoneidad didáctica y propuestas de cambio

En esta sección analizamos el diseño, implementación y evaluación de la experiencia de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas vivida en el periodo de prácticas, descrita en la sección 3, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos sintetizados en la sección 4. Se trata de responder a las preguntas que formulamos en la sección 2, las cuales motivan nuestra indagación:

1. ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado experimentado durante el periodo de prácticas en 3º de ESO?
2. ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en una próxima experimentación?

En definitiva se trata de valorar la idoneidad didáctica de la experiencia y de identificar propuestas fundamentadas de posibles cambios en un futuro rediseño de la unidad didáctica.

### 4.1. Facetas epistémica y ecológica

El proceso de estudio implementado ha seguido básicamente los contenidos y orientación propuestos en el libro de texto (Colera et al., 2010) que se viene usando en el tercer curso de ESO en el instituto en el que se realizaron las prácticas de enseñanza. Siguió el siguiente esquema: presentación y aprendizaje de la fórmula general para hallar las soluciones de la ecuación cuadrática. Como se puede observar en la figura 2.1 (sección 2) no hay una problematización previa que lleve a la búsqueda, tras un proceso de generalización, de soluciones para las ecuaciones cuadráticas. Se presenta un resultado, una fórmula de cálculo, cuya justificación se descarta por ser un proceso «largo y complicado» Se transmite la visión de la matemática como sistema de reglas generales que hay que saber interpretar y seguir en cada caso, para lo cual es suficiente mostrar algunos ejemplos aclaratorios y ejercitar su aplicación en casos similares. La resolución de problemas verbales (puesta en ecuación) es también una cuestión de seguir unas reglas (figura 2.3). Sería necesario contemplar el uso de situaciones introductorias que lleven al planteamiento de ecuaciones cuadráticas

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

y motiven la búsqueda de procedimientos eficaces para su solución. En este sentido la situación descrita en Swan, Dawson, Evans et al., (2012) puede ser usada con dicha finalidad.

Los conceptos de variable, incógnita y parámetro no se discutieron y aclararon con ocasión del estudio de las ecuaciones cuadráticas, como tampoco algunas propiedades básicas involucradas en su resolución, como la ley del factor nulo. La ecuación cuadrática es una especie de caja negra, una «máquina» que admite una cierta clase de números como entrada y produce como resultado dos números, uno o ninguno. Como se muestra en Posadas (2013) hay alternativas a este planteamiento procedimental/algorítmico, tanto desde el punto de vista de la investigación (Hanna & Barbeau, 2008), como de las innovaciones educativas (Pérez et al, 1999). Es posible y deseable diseñar una unidad didáctica que contemple la introducción de las técnicas de completar el cuadrado, y de factorización, al menos en casos sencillos. También es posible combinar el uso del lenguaje algebraico junto con el geométrico, como muestran los trabajos de Radford y Guerete (1996) y Galván (2006), lo que facilita la comprensión de las transformaciones algebraicas que llevan a establecer la fórmula general de resolución de las ecuaciones de segundo grado. En consecuencia, podemos calificar la idoneidad epistémica del proceso implementado como baja por las razones mencionadas. En los trabajos citados encontramos criterios y recursos para su mejora.

Desde el punto de vista de las orientaciones curriculares hemos encontrado apoyo para retrasar el estudio a cursos posteriores al 3º de ESO, y relacionar la resolución de las ecuaciones cuadráticas con el de las funciones cuadráticas (procesos de modelización funcional), lo que permitirá dar sentido a la búsqueda de los ceros de la función cuadrática, entre otras, como la función exponencial, usando las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas, software de cálculo simbólico). La introducción de los cambios mencionados permitiría poner en juego, y en consecuencia desarrollar, «estándares de la práctica matemática»[2] (competencias, entendidas como expectativas generales de aprendizaje) tales como:

- Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos
- Razonar de manera abstracta y cuantitativa
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los otros
- Modelizar con matemáticas.

### 4.2. Facetas cognitiva y afectiva

El análisis de los resultados obtenidos en la evaluación de los aprendizajes logrados en nuestra experiencia de enseñanza ha revelado algunas dificultades en la resolución de ecuaciones cuadráticas, aunque el énfasis en nuestro caso ha sido en aspectos básicamente procedimentales.

El estudio de Vaiyavutjamai y Clements (2006) reveló también la existencia de dificultades de tipo conceptual (comprensión de la variable, aplicación de propiedades, entre otras), al ser entrevistados una muestra de estudiantes. Esta investigación fue realizada con estudiantes de 9 grado, lo que corresponde al curso de 3º de ESO (entendiendo que los alumnos estudiarán poste-

2 *Common Core State Standards for Mathematics.* National Governors Association Center for Best Practices (NGA Center) and the Council of Chief State School Officers (CCSSO) (USA).

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

riormente los grados, 10, 11 y 12, antes de iniciar los estudios universitarios). Una conclusión de esta investigación es retrasar el estudio del tema a cursos posteriores, lo que mejoraría la idoneidad cognitiva del proceso de estudio, y posiblemente también la afectiva.

En nuestro caso los instrumentos de evaluación de los aprendizajes deberán ser mejorados para obtener información tanto de aspectos procedimentales como aspectos conceptuales y argumentativos. El cuestionario desarrollado por Vaiyavutjamai y Clements (2006) para evaluar las destrezas de los estudiantes en la resolución de ecuaciones cuadráticas incluyó un conjunto de 18 cuestiones, por lo que permite cubrir de manera más sistemática y válida los diferentes tipos de ecuaciones que se espera resuelvan los estudiantes. Las cuestiones incluidas en el instrumento desarrollado por Didiş, Baş y Erbaş (2011) pueden ser útiles para evaluar aspectos conceptuales y argumentativos.

### 4.3. Faceta instruccional (interaccional y mediacional)

Los modos de interacción en el aula que fueron implementados en la experiencia responden básicamente a un modelo tradicional: el profesor presenta la expresión general de la ecuación cuadrática, explica el significado de los parámetros, presenta algunos ejemplos, y los alumnos realizan ejercicios. Son escasos los momentos en que se concede un grado de autonomía a los estudiantes, exceptuados los momentos de trabajo individual para realizar ejercicios en clase o en casa.

Sería deseable introducir cambios en el proceso de enseñanza orientados a que los alumnos planteen cuestiones y presentan soluciones; exploren ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usen una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos.

En nuestra experiencia se utilizaron únicamente los recursos propios del aula del instituto y al alcance de los alumnos: pizarra, libro de texto y calculadora. No se utilizaron recursos manipulativos ni recursos tecnológicos TIC ya que en realidad no se consideraron necesarios para apoyar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos planificados.

El número de alumnos (29) y su distribución eran idóneos. El horario de las clases de matemáticas fue muy bueno. Las cuatro horas semanales de clase estaban colocadas por la mañana (lunes de 9:15 a 10:15 horas, martes de 10:15 a 11:15 horas, miércoles de 11:45 a 12:45 horas y jueves de 12:45 a 13:45 horas). El hecho de no tener clase ni a primera ni a última hora de la mañana, además de no tener clase los viernes, propició que la mayoría de los alumnos trabajara de forma correcta y el comportamiento fuera bueno. El tiempo dispuesto para las clases también fue correcto y suficiente para enseñar los contenidos pretendidos. Fueron un total de 5 horas de clase más una hora de examen. El número de sesiones permitió tratar los contenidos más importantes del tema y adaptar la temporización y la distribución de los contenidos al nivel del aula. Es cierto que tanto el número de alumnos como el horario y la gestión del tiempo han sido correctos. Pero la mejora de la idoneidad mediacional del proceso llevaría a incluir actividades con material manipulativo (como el sugerido en el trabajo de Radford y Guerete), y también recursos informáticos (como el descrito en Galván, 1996).

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, *1*, 77-96.

## Conclusiones

La elaboración de este trabajo permite conocer y aplicar unas herramientas útiles para analizar la propia práctica docente. Focalizar la atención en la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza vivido ha llevado a tomar conciencia de la necesidad de recopilar, analizar y sistematizar los conocimientos didáctico-matemáticos disponibles, que son resultados de la abundante investigación que se viene realizando a nivel internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de los distintos temas curriculares. La consulta de la base de datos MathEduc (http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/) muestra que esto es general para cualquier tema matemático, por lo que cualquier propuesta de cambio en el diseño, implementación y evaluación de un curso o una unidad didáctica debe tener en cuenta los resultados de las innovaciones e investigaciones previas.

En nuestro caso, la enseñanza de la ecuación cuadrática fue implementada en un contexto educativo específico, el cual impone condicionamientos difíciles de superar: tiempo asignado, material de aprendizaje (libro de texto), así como una manera o concepción implícita de entender la matemática y su enseñanza. Estas restricciones, u otras, siempre estarán presentes en nuestra práctica como profesores de matemáticas; pero es importante tomar conciencia de las mismas, así como de conocer otras maneras de concebir la matemática, su enseñanza y aprendizaje. La reconstrucción de un significado de referencia didáctico-matemático amplio es imprescindible para introducir progresivamente propuestas de cambio fundamentadas.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemáticos, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas facetas implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales de los estudiantes, instrumentos de evaluación y la identificación de conflictos de aprendizaje potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles.

El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica. Si bien es cierto que el Decreto de Enseñanzas Mínimas del MEC hace referencia al estudio de las ecuaciones cuadráticas en 3º de ESO lo hace de manera poco concreta, dejando en consecuencia un cierto grado de libertad a los autores de libros de texto y los departamentos de matemáticas de los institutos.

El mayor condicionamiento para la enseñanza implementada ha venido de la decisión de usar el texto de Colera et al. (2010). Tras esta decisión puede haber una concepción que valora positivamente el aprendizaje de algoritmos y atribuye una cierta incapacidad de los estudiantes para la comprensión conceptual y la argumentación deductiva. Otro factor restrictivo para la introducción de cambios en los contenidos y el consiguiente uso de medios tecnológicos es el tiempo disponible para el desarrollo del tema; el programa de estudio de las matemáticas de 3º de ESO, y en general, en toda la ESO nos parece excesivamente recargado de contenidos, lo que puede dificultar la implementación de innovaciones como las que hemos identificado en nuestra indagación.

La formación inicial y permanente de profesores es un factor esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esa formación debe orientarse al desarrollo profesional de los profesores, y ello supone que éstos adquieran y pongan en práctica un profundo conocimiento especializado del contenido en sus diversas facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2009). En nuestro caso, la estrategia formativa adoptada permite motivar y dar sentido a la búsqueda sistemática del conocimiento especializado del contenido matemático, guiada por la pregunta, ¿Cómo mejorar mi práctica profesional?

**Agradecimientos**

Trabajo realizado parcialmente en el marco del proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

## Referencias bibliográficas

Colera, J. Gaztelu, I., y Oliveira, M. J. (2010). *Matemáticas 3º Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Didiş, M. G., Baş, S., y Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. En *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7)*. University of Rzeszów: Poland. http://www.cerme7.univ.rzeszow. pl/WG/3/CERME7_WG3_Gozde.pdf

Galván, C. (2006). Desde la cuadratura de polígonos a ecuaciones de segundo grado. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 5*, 23-35.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J.D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J.D., y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia Invitada al *VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile), 4-9 enero 2009.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M.R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII*(2), 221-252.

Godino, J.D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Hanna, G., y Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. ZDM. *Mathematics Education, 40*, 345-353.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. Madrid: MEC.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.

Officers. (2011). *Common core state standards for mathematics*. Recuperado de http:// www. corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood, 33*(1), 31-36

Pérez, R. (Coord.) (1999). *Construir las matemáticas. 4º ESO*. Granada: Proyecto Sur.

Posadas, P. (2013). Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria. Tesis de Fin de Máster. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofeso-res.htm

Radford, L., y Guerette, G. (1996). Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. En V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics* (p. 69-76). Washington, D.C: The Mathematical Association of America.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5-41.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Skemp. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teachers*, Nov. 1978, 9-15

Swan, M., Clarke, N., Dawson, C., Evans, S., Burkhardt, H., Crust, R., Noyes, A., & Pead, D. (2012). *Solving quadratic equations: Cutting corners. Mathematics Assessment Resource Service*. University of Nottingham & UC Berkeley. Recuperado de http://map.mathshell.org/materials/lessons.php?taskid=432

Vaiyavutjamai, P., y Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal, 18*(1), 47-77.

Posadas, P., y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77-96.