DIDACTICAE | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.2023.14.137-159

HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA

Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra

Recepción: 21/10/2022 | Revisión: 26/11/2022 | Aceptación: 14/12/2022 | Publicación: 01/10/2023

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Carla Patrícia SOUZA RODRIGUES PINHEIRO
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0766-8647

Francisco RÉGIS VIEIRA ALVES
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
fregis@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Daniel BRANDÃO MENEZES
Universidade Estadual Vale do Acaraú
brandaomenezes@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5930-7969

Resumen: Las secuencias de Padovan y Perrin tienen particularidades intrigantes en sus definiciones. Sin embargo, la investigación muestra que en la literatura de Historia de las Matemáticas existe un número escaso de trabajos que aborden estas secuencias, así como una ausencia parcial o total de su discusión en las carreras de pregrado en Matemáticas. Así, este trabajo es un extracto de una tesis de maestría, cuyo objetivo fue desarrollar las secuencias de Padovan y Perrin en dos prácticas de enseñanza apoyadas en el software GeoGebra y guiadas por la Teoría de Situaciones Didácticas. La metodología de investigación escogida para este estudio fue la Ingeniería Didáctica, apoyada en la Teoría de las Situaciones Didácticas, que sirve para organizar las sesiones de enseñanza, ayudando a estructurar la experimentación de esta Ingeniería, en la que analizamos el comportamiento de los estudiantes de pregrado en Matemáticas durante su proceso de aprendizaje. Como resultado, observamos que este tipo de situación didáctica permite un mejor acercamiento a la unión entre álgebra y geometría, permitiendo la posibilidad de construir conceptos a través de la observación de cada secuencia.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica; secuencia de Padovan; secuencia de Perrin; Teoría de las Situaciones Didácticas; GeoGebra.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

ENGINYERIA DIDÀCTICA PER A L'ENSENYAMENT DE LES SEQÜÈNCIES DE PADOVAN I PERRIN AMB EL PROGRAMARI GEOGEBRA

Resum: *Les seqüències de Padovan i Perrin tenen particularitats intrigants en les seves definicions. Tanmateix, la investigació mostra que en la literatura d'Història de les Matemàtiques existeix un nombre escàs de treballs que abordin aquestes seqüències, així com una absència parcial o total de la seva discussió en els graus de Matemàtiques. El treball que presentem parteix d'una tesi de màster, l'objectiu de la qual va ser desenvolupar les seqüències de Padovan i Perrin en dues pràctiques d'ensenyament amb el suport del programari GeoGebra i guiades per la Teoria de Situacions Didàctiques. La metodologia de recerca escollida és l'Enginyeria Didàctica, recolzada en la Teoria de les Situacions Didàctiques, que serveix per organitzar les sessions d'ensenyament, ajudant a estructurar l'experimentació d'aquesta Enginyeria, en la qual analitzem el comportament dels estudiants de grau en Matemàtiques durant el seu procés d' aprenentatge. Com a resultat, observem que aquest tipus de situació didàctica permet una millor comprensió de la unió entre àlgebra i geometria, facilitant així la possibilitat de construir conceptes a través de l'observació de cada seqüència.*

Paraules clau: *Enginyeria Didàctica; seqüència de Padovan; seqüència de Perrin; Teoria de les Situacions Didàctiques; GeoGebra*

DIDACTIC ENGINEERING TO TEACH THE PADOVAN AND PERRIN SEQUENCES WITH GEOGEBRA SOFTWARE

Abstract: *The Padovan and Perrin sequences have intriguing particularities in their definitions. However, research so far has shown that there is a scarce number of works that address these sequences in the literature of the History of Mathematics, along with a remarkable absence of its usefulness at the undergraduate level. This work is an extract of a master's thesis, whose objective was to develop the sequences of Padovan and Perrin in two teaching practices supported by the GeoGebra software and guided by the Theory of Didactic Situations. The research methodology chosen for this research was the Didactic Engineering, supported by the Theory of Didactic Situations, which serves to organize the teaching sessions, helping to structure the experimentation of this Engineering, in which the students' learning process is analyzed. The results show that this type of didactic situation allows for a better approximation to the union between algebra and geometry, thus fostering the possibility of building concepts through the observation of each sequence.*

Keywords: *Didactic Engineering; Padovan sequence; Perrin sequence; Theory of Didactic Situations; GeoGebra.*

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Introducción

Las secuencias de Padovan y Perrin son secuencias recurrentes y lineales, con características encontradas en la famosa secuencia de Fibonacci. Con base en investigaciones, se observó que estas secuencias tienen poca visibilidad en el contexto de la Historia de las Matemáticas en los estudios de pregrado (Vieira y Alves, 2020). De esta manera, surgió el interés por explorar las secuencias de Padovan y Perrin y sus identidades a partir de construcciones geométricas, con el objetivo de incentivar a los estudiantes de pregrado a investigar algunas de sus definiciones y relaciones, como aporte a su formación inicial.

Para una mejor comprensión de la historia de estas secuencias, se realizó una investigación sobre el tema con foco en su enseñanza. En los estudios de Vieira y Alves (2020), Edgar y Nacin (2021), Pinheiro y Alves (2021) y Mangueira (2022), encontramos el desarrollo de estas secuencias y su enseñanza a través de situaciones didácticas, sustentadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas y por Ingeniería Didáctica.

Vieira y Alves (2020) proponen en su trabajo una práctica de transposición didáctica que involucra la secuencia de Padovan y Tridovan, al discutir factores esenciales durante la preparación de la planificación. Estos autores enfatizan que [...] "Los docentes deben informar a los estudiantes, en el aula, del estado inicial de los conceptos matemáticos, siempre con la posibilidad de adaptaciones y cambios durante la aplicación" (Vieira y Alves, 2020, p. 248). De esta forma, pensamos en planificar más claramente la introducción de este contenido, avanzando en las prácticas de aula.

El trabajo de Edgar y Nacin (2021, p. 1) muestra el estudio de demostraciones de las identidades de Padovan a través de triángulos en su definición original, a partir de los números de Padovan, en los que se menciona que […] "estos números surgen de tales una construcción natural, se puede adivinar correctamente que muchas identidades pueden probarse puramente geométricamente", lo que corrobora la propuesta de este estudio.

Siguiendo la línea de los autores mencionados, Pinheiro y Alves (2021) muestran en su artículo el desarrollo de un estudio sobre la secuencia Padovan, realizando situaciones didácticas de Ingeniería Didáctica para la visualización de la secuencia Padovan a través del software GeoGebra. Su trabajo aboga por una enseñanza que proporcione la investigación de definiciones y propiedades matemáticas con GeoGebra, en una perspectiva epistemológica.

El trabajo de Mangueira (2022, p. 65), que se basó en el trabajo de Vieira y Alves (2020), aborda la hipercomplejificación de la secuencia de Perrin, con demostraciones de relaciones recurrentes bidimensionales, tridimensionales y n-dimensionales de Perrin. El autor afirma que la secuencia de Perrin se "diferencia de la secuencia de Padovan solo con respecto a sus términos iniciales" (Mangueira, 2022, p. 65).

Ante este contexto, el objetivo fue desarrollar las secuencias de Padovan y Perrin en dos prácticas de enseñanza apoyadas por el software GeoGebra y guiadas por la Teoría de las Situaciones Didácticas, organizando el proceso de aprendizaje de los estudiantes y futuros docentes sobre el estudio de estas secuencias.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Para lograr este objetivo se necesitó de una organización y diseño de secuencias didácticas para la enseñanza de este tema, en el cual contamos con el aporte de las fases de la Ingeniería Didáctica para su desarrollo. Cada una de estas fases se describe a lo largo de las secciones de este trabajo.

En cuanto a la fase de experimentación, se utilizó la dialéctica de la Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada con cuatro estudiantes del 6º semestre de la carrera de Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará (IFCE), en la disciplina de Historia de las Matemáticas.

Para la práctica docente utilizamos GeoGebra, con el fin de demostrar algunas identidades en la forma geométrica, trayendo al proceso de enseñanza y aprendizaje una interacción entre las secuencias y la tecnología, a partir del control de las acciones desarrolladas durante su estudio, de forma gradual y de acuerdo con la necesidad del estudiante (Ribeiro y Souza, 2016). De hecho, el uso del software GeoGebra tiene como objetivo mejorar la comprensión de las situaciones didácticas propuestas.

En el siguiente apartado presentamos la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) como guía para la sesión docente elaborada, la Ingeniería Didáctica (ED) para el diseño y organización de este estudio, en el que cada una de sus fases compone el curso metodológico desarrollado, y finalmente, presentamos una discusión de los resultados de la ingeniería desarrollada.

1. Ingeniería Didáctica y Teoría de Situaciones Didácticas

En la década de 1980, los profesores de Matemáticas se preocuparon por la creación de centros universitarios en Francia, con el objetivo de mejorar la disposición de la enseñanza, dando como una de sus creaciones el surgimiento de la Ingeniería Didáctica (Vieira y Alves, 2020). Apuntando a la investigación para el desarrollo de situaciones didácticas en la enseñanza, tenemos que la Ingeniería Didáctica (ED) es una metodología de investigación que consiste en un agrupamiento de secuencias, con el objetivo de desarrollar un plan de aprendizaje dirigido a los estudiantes (Laborde, 1997).

Según Artigue (1988), la ED es similar al trabajo de un ingeniero, en el cual, para desarrollar un proyecto, se debe tener más allá del conocimiento científico, pues, a la vez, éste trabaja con objetos que traen preocupaciones mayores que las ciencias. Así, Joshua y Dupin (1993) describen esta metodología aplicada en el aula como:

> Esto conduce a un enfoque didáctico que debe oponerse al que se revela desde una pedagogía general, en la medida en que, en este último caso, estaría interesada en la búsqueda de reglas de aprendizaje y educación independientes de los contenidos precisos y dirigidos para la enseñanza, considerando cualquier contenido en general. Al menos en el caso de disciplinas complejas y altamente estructuradas, como las disciplinas científicas y las matemáticas, es poco probable que los conocimientos relevantes puedan dominarse mediante la comprensión de fenómenos de enseñanza que dejen de lado los conocimientos específicos (Joshua y Dupin, 1993, p. 3).

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

La ED está estructurada en etapas que son: (i) análisis preliminares; (ii) concepción y análisis a priori; (iii) experimentación; (iv) análisis a posteriori y validación (Artigue, 1984; Laborde, 1997). En un primer momento, siguiendo este camino, mostramos en los análisis preliminares el contexto histórico y las definiciones esenciales para demostrar las identidades de Padovan y Perrin. En el análisis a priori, describimos la elaboración y descripción de situaciones didácticas centradas en las representaciones geométricas de estas identidades.

Así, el análisis preliminar es la fase que estudia la teoría sobre el tema elegido, su contexto histórico y didáctico y las definiciones de los teoremas propuestos, identificando las variables que se mencionarán en las fases posteriores. En el análisis a priori, realizamos un estudio del conjunto de circunstancias, objetivos e hipótesis de los alumnos, indicando cómo se pueden realizar elecciones para comprender el comportamiento de los alumnos durante el proceso. En esta fase, las construcciones de las situaciones didácticas fueron creadas como demostraciones de las identidades presentadas en los teoremas especificados en el análisis preliminar.

En la experimentación ponemos en práctica lo planteado en el análisis a priori, así como la recogida de datos y observaciones pertinentes. Finalmente, en el posterior análisis y validación, se verifica todo el proceso, reportando el resultado como un éxito o si hubo fallas durante la aplicación de las fases. Vale la pena señalar que el detallado iba de cada etapa fue realizado por Artigue (1995).

Durante las fases iniciales, nos dimos cuenta de la importancia de las situaciones de enseñanza, ya que permiten la construcción del conocimiento de los estudiantes y la modificación de su enfoque en vista de las observaciones realizadas por el profesor en la aplicación de las actividades propuestas. Resaltamos que la participación del docente en el momento del debate colectivo es fundamental para que se refuerce el vínculo de la triada didáctica docente-alumno-saber (Douady, 1995).

Pensando en la relevancia de las situaciones de enseñanza, adoptamos la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), que trabaja en conjunto con la ED. En TSD, el estudiante se apropia del conocimiento y lo transforma en conocimiento para sí mismo, a partir de sus conocimientos previos y de la creación de un medio por parte del docente, estimulando el lado investigativo del estudiante durante la resolución de situaciones didácticas en Matemática.

Una situación es un modelo de relación entre un sujeto y un ambiente dado, que reúne las condiciones en las que ese sujeto se encuentra y las relaciones que lo unen al medio creado intencionalmente por el docente. En este caso, el medio es un subsistema autónomo, antagónico al sujeto (Brousseau, 2008).

En la situación didáctica, se motiva al estudiante a participar en la actividad, desarrollando su autonomía durante el proceso de aprendizaje. En la fase didáctica (las tres primeras fases de TSD), el estudiante desarrolla una estrategia para resolver la situación y adquirir conocimientos, de acuerdo con el contrato didáctico establecido, quedando oculta la intención del profesor en ese momento.

Según Brousseau (1986), las etapas de TSD son acción, formulación, validación e institucionalización. Estos se definen como:

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

En la etapa de acción, el alumno realiza los procedimientos sin intervención del docente, de acuerdo con sus conocimientos previos adquiridos, con el objetivo de resolver la situación didáctica propuesta, presentando un razonamiento más práctico que teórico. En la fase de formulación, se desarrolla de la siguiente manera:

> Consiste en establecer progresivamente un lenguaje que todos puedan entender, teniendo en cuenta los objetos y relaciones relevantes de la situación de manera adecuada (es decir, permitiendo razonamientos y acciones útiles). En cada momento, este lenguaje construido se pone a prueba desde el punto de vista de la inteligibilidad, la facilidad de construcción y la duración de los mensajes que permiten los intercambios. La construcción de tal lenguaje o código (repertorio, vocabulario, a veces sintaxis) en un lenguaje común o formalizado permite explicar acciones y modelos de acción (Brousseau, 2002, p. 12).

En esta ocasión, el estudiante presenta su estrategia de resolución más orientada al conocimiento teórico, utilizando un lenguaje más formal, considerando que los argumentos serán explorados y validados más adelante. Luego, en la fase de validación:

> Los estudiantes tratan de convencer a los interlocutores de la veracidad de los enunciados, utilizando un lenguaje matemático adecuado (demostraciones); las situaciones de devolución, acción, formulación y validación caracterizan la situación didáctica, en la que el profesor permite al alumno recorrer los caminos del descubrimiento, sin revelar su intención didáctica, teniendo sólo el papel de mediador (Teixeira y Passos, 2013, p. 165-166).

En la fase de validación, el alumno trata de convencer a los participantes de que sus argumentos utilizados en la situación didáctica están siendo validados por sus estrategias, a través de demostraciones y en un lenguaje más formal.

En la última fase, tenemos la institucionalización, que "tiene como objetivo enseñar y transmitir conocimientos para que el estudiante pueda establecer una relación entre los conocimientos que ha encontrado y los conocimientos matemáticos que con mayor frecuencia se le asignan de antemano (por currículo y programas)" (Margolinas, 2015, p. 35). En esta fase, el docente debe participar más activamente en la situación, revelando el objetivo principal de la tarea y validando las hipótesis de los alumnos.

Estas situaciones deben hacer emerger el conocimiento del alumno, de modo que haya una única intención didáctica esperada. Eventualmente, los estudiantes encuentran una forma más fácil de resolver los problemas propuestos, en los que, en este momento, la construcción del conocimiento aún está en proceso.

Es fundamental que, durante este proceso de enseñanza, exista una interacción entre los participantes, tanto con los que aprenden como con los que enseñan, utilizando materiales didácticos adecuados. Estos materiales ayudarán en la solución del problema propuesto, teniendo en cuenta las reglas establecidas, con el objetivo de trazar un camino para obtener los resultados.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Por lo tanto, se observa que la relación complementaria entre ED y TSD determina el conocimiento teórico, metodológico y didáctico durante una práctica docente organizada para la transposición de contenidos matemáticos (Alves, 2017).

De lo anterior, en el siguiente apartado destacamos las etapas de la ED relacionadas con las situaciones didácticas propuestas para la construcción de estas secuencias, analizando lo expuesto por los estudiantes.

2. Análisis preliminares

La fase inicial de la Ingeniería Didáctica (ED) es el análisis preliminar que, según Artigue (1995), tiene como objetivo analizar la epistemología del contenido explorado en la investigación, los obstáculos encontrados en el proceso de enseñanza y verificar las concepciones y conocimientos previos de los estudiantes. En el caso de este estudio, los análisis preliminares se ocupan de una perspectiva sobre el objeto de estudio, que son didácticos, epistemológicos y cognitivos (Pais, 2015).

Durante esta fase, a partir de una investigación bibliográfica, en cuanto a la dimensión didáctica, el docente promueve un debate con los estudiantes, de tal manera que ellos construyen su propio conocimiento, a partir de los temas tratados en el aula. Para que esto suceda, se deben enumerar algunos elementos esenciales para indicar las acciones de los estudiantes, como el estudio de las definiciones matemáticas y las observaciones de las sucesiones de Padovan y Perrin.

En primer lugar, se observó la génesis de los conceptos matemáticos discutidos, asimilando las definiciones y teoremas, así como los obstáculos encontrados durante el proceso (Artigue, 1995). En otro momento, las construcciones fueron observadas en el software GeoGebra para la comprobación visual de las identidades, identificando las posibles dificultades del alumno durante su construcción, que es el campo epistemológico.

Almouloud (2007) destaca que ciertos temas se descuidan durante el estudio de la Historia de las Matemáticas, quedando fuera del currículo visto por los estudiantes y que son contenidos esenciales. Citamos como ejemplo las sucesiones de Fibonacci y Lucas, que sirven de apoyo para estudios sobre las sucesiones de Padovan y Perrin de sus identidades. Con esto, surgió el deseo de explorar las secuencias de Padovan y Perrin, verificando sus propiedades a través de visualizaciones geométricas.

Ante esta información, es "posible verificar los obstáculos epistemológicos, a partir del contenido Matemático elegido, que deben demostrarse en un lento proceso de avances y retrocesos" (Pais, 2015, p. 49). Sin embargo, el plan pedagógico debe estar bien planificado, ya que se realizará una investigación durante el desarrollo de la propuesta en torno al contenido matemático.

Por lo tanto, durante esta fase, la experiencia del docente y el conocimiento del contenido son fundamentales para la planificación y construcción de situaciones didácticas, a partir del tema matemático explorado en este trabajo. En cuanto a la dimensión cognitiva, proponemos

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

dos situaciones didácticas para que los estudiantes puedan desarrollar su razonamiento lógico-deductivo, con el objetivo de movilizar conocimientos y aprender sobre este tema.

Así, a partir de estudios investigativos sobre la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin, se abordan aspectos históricos, definiciones y teoremas a trabajar durante la investigación.

2.1 Secuencia de Padovan y Perrin

Creada por el arquitecto italiano Richard Padovan (1935-?), la secuencia de Padovan se asemeja a la secuencia de Fibonacci en que es aritmética, lineal y recurrente (Stewart, 2000). Una de las presentaciones más importantes de Fibonacci es la imagen de su espiral, en la que la suma de cuadrados corresponde a cada término de la sucesión de Fibonacci por medio de la proporción áurea. Así, la secuencia de Padovan también demuestra similitud al construir una espiral a través de polígonos regulares; en este caso, se utilizan triángulos equiláteros como se muestra en la Figura 1.

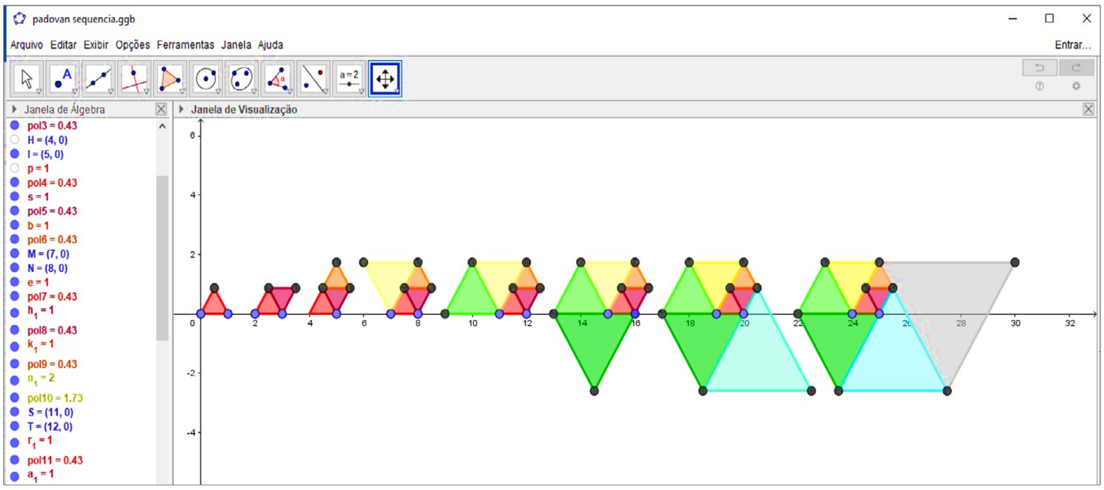

Figura 1. Sucesión de Padovan con sus ocho primeros términos. Fuente: Elaboración propia (2022).

Mirando la Figura 1, vemos que las longitudes de los lados de los triángulos equiláteros producen la secuencia de Padovan representada por:

Definición 1: Secuencia de Padovan (Pa) es definida por la ley de recurrencia $Pa_n = Pa_{n-2} + Pa_{n-3}$ $n \geq 3$ *e* Pa_n es el enésimo término de la secuencia.

Según Edgar y Nacin (2021), existen diferentes fuentes que utilizan varias condiciones iniciales para esta secuencia como base para la construcción de la espiral. Por tanto, usamos los términos iniciales $Pa_0 = 0, Pa_1 = Pa_2 = Pa_3 = 1$. Los primeros términos de la secuencia son:

$$0,1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12, \ldots$$

DIDACTICAE | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.2023.14-137-159

De esta forma, la investigación de las identidades padovanas más elementales trae propiedades que son ejemplos específicos de definiciones más generales y que también tienen demostraciones geométricas (Edgar y Nacin, 2021).

Identidad 1: Para todo $n \geq 7$, $Pa_n^2 = 2Pa_{n-2}^2 + 2Pa_{n-3}^2 - Pa_{n-7}^2$

Teorema 1: Para todo $n \geq 1$, tenemos $Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n-1} \cdot Pa_n$

Del estudio de la secuencia de Padovan, se observó otra similitud entre esta y la secuencia de Fibonacci, que son las ecuaciones $x^2 = x + 1$ y $x^3 = x + 1$, respectivamente (Pinheiro y Alves, 2021). Segundo Pinheiro y Alves (2021), la primera ecuación pretende representar la división de un rectángulo en un rectángulo similar más pequeño y en un cuadrado; la segunda ecuación divide un cuadrado en tres rectángulos similares de diferentes tamaños, estableciendo la proporción áurea para la secuencia de Fibonacci y el número plástico para la secuencia de Padovan en las respectivas ecuaciones.

Frente al concepto de número plástico, Edgar y Nacin (2021) afirman que los números de Padovan surgen espontáneamente y sus identidades pueden probarse puramente a través de la Geometría, lo cual está en línea con la intención de este trabajo, que busca probar estas identidades desde una perspectiva geométrica. construcción con apoyo del software GeoGebra.

Los estudios sobre la secuencia de Perrin, en cambio, surgieron gracias al trabajo del francés Olivier Raoul Perrin (1841-1910), ingeniero que en sus ratos libres gustaba de escribir trabajos científicos, con preferencia en el área de la Matemáticas (Mangueira, 2022).

En 1876, esta secuencia fue mencionada implícitamente por Édouard Lucas, conocido por crear el juego matemático Torre de Hanoi y la secuencia y los números de Lucas (Adams y Shanks, 1982). En 1899, François Perrin definió la sucesión de Perrin (Pe), que tiene especial importancia para la Teoría de Grafos y se utiliza para descubrir las coordenadas de los taxis en las redes urbanas de forma confidencial (Sugumaran y Rajesh, 2017). Su ley de recurrencia es:

Definición 2: $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3} \quad n \geq 3$

En que tenemos los términos iniciales $Pe_0 = 3$, $Pe_1 = 0$, $Pe_2 = 2$. Los primeros términos de la secuencia son:

$$3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, \ldots$$

La ecuación característica de los números de Perrin es igual a la ecuación característica de Padovan, ya que su fórmula de recurrencia es la misma, excepto por los valores iniciales. La secuencia de Perrin tiene una relación de convergencia entre los términos vecinos, el número plástico, que tiene un valor de aproximadamente 1.324718, destacando que esta constante también está relacionada con los números de Padovan, ya que la secuencia de Perrin se puede obtener por la secuencia de Padovan.

En el siguiente apartado traemos la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas que guían esta investigación a través de las definiciones y teoremas abordados durante este análisis preliminar.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

3. Análisis a priori

En esta fase, el docente planifica una acción controlada, en la que su intervención debe ocurrir de manera oportuna y en el momento adecuado, con el propósito de predecir comportamientos frente a las conjeturas de los alumnos. Así, el docente tiene el rol de mediador, ayudando el alumno a comprender, procediendo simultáneamente con los elementos de forma cognitiva, epistemológica y didáctica (Almouloud y Coutinho, 2008).

Según Alves (2014), la situación didáctica es exitosa cuando el alumno logra alcanzar el conocimiento a través de su compromiso y conocimientos previos. Así, al mediar las acciones, el docente promueve un ambiente propicio para el desarrollo del conocimiento lógico-matemático. Así, el alumno recibe la situación-problema elaborada y el docente tiende a supervisar las actividades realizadas, verificando si se está produciendo el aprendizaje.

En esta fase se elaboraron dos situaciones didácticas de enseñanza, utilizando las secuencias de Padovan y Perrin con el apoyo de la TSD. El docente debe elaborar preguntas para que se presenten durante la ejecución de situaciones didácticas, resaltando conceptos matemáticos para que los estudiantes puedan presentar soluciones. Así, se incentiva a los estudiantes a pensar y expresar formas de construcción del conocimiento matemático a través de situaciones didácticas.

Este análisis a priori se apoyó en el software GeoGebra como herramienta pedagógica para la transposición didáctica, ya que el uso de las Tecnologías Digitales de la Información y la Comunicación (TDIC) brinda apoyo a las clases de Matemática. De esta forma, buscamos probar las identidades con GeoGebra en un proceso dinámico, con resultados del TSD en un curso de formación inicial para profesores de Matemáticas.

Según Borba (2011), las posibilidades experimentales de los medios utilizados para los estudios pueden proporcionar la elaboración y verificación de teorías, llevando a los estudiantes a desarrollar sus ideas hasta el punto de crear hipótesis. A partir de esta información se construyeron situaciones didácticas.

4. Concepción y construcción de las situaciones didácticas

Durante la investigación resultante del máster, se realizaron estudios sobre las secuencias de Padovan y Perrin. A partir de esto, con base en la definición y teoremas presentados en los análisis preliminares, desarrollamos las situaciones didácticas sobre este tema de estudio con base en la TSD.

Situación didáctica 1: Considere la secuencia de Padovan $0,1,1,1,2,2,3,4,5,7,\ldots$ y su relación de recurrencia $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}\quad n \geq 3$. Con base en las identidades presentadas en los análisis preliminares, ¿Cómo se pueden realizar sus demostraciones a través de formas geométricas utilizando el software GeoGebra?

En la fase de acción, los estudiantes deben buscar los números de Padovan a través de la Figura 2 propuesta en GeoGebra, aun observando las relaciones que se pueden encontrar desde el lado de un triángulo equilátero. En este punto, los estudiantes no necesitan tener una habilidad completa con los comandos, ya que este no es el meollo del problema. A su vez, los estudiantes pueden tener dificultades para asociar un número de Padovan con un lado del triángulo. El propósito es comprender cómo se lleva a cabo la construcción, asimilando la información principal para orientar las acciones que se desarrollarán.

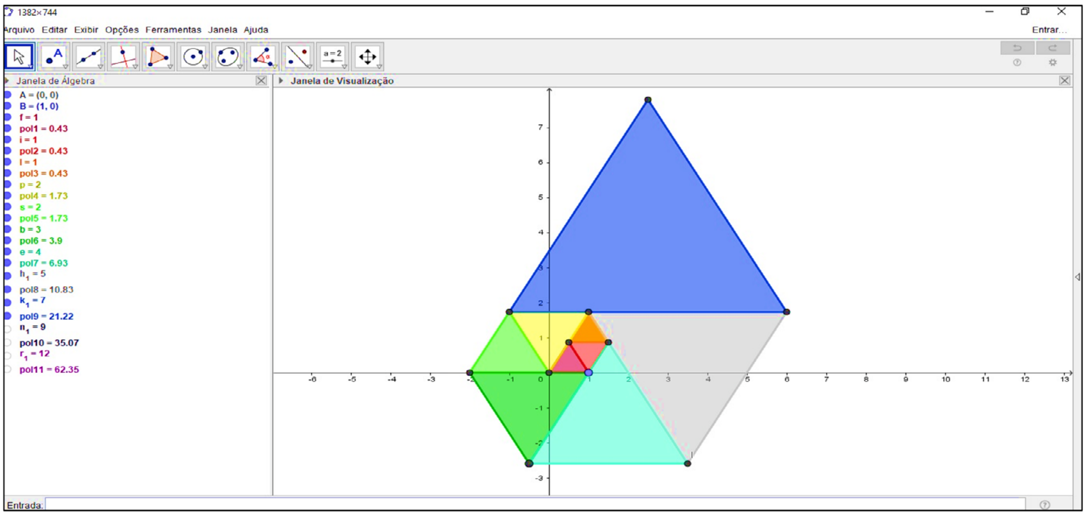

Figura 2. Secuencia de Padovan con 9 términos. Fuente: Elaboración propia (2022).

En la fase de formulación, se espera que los estudiantes identifiquen la relación de recurrencia de la sucesión de Padovan y, en consecuencia, demuestren el área del triángulo equilátero para la prueba de identidades. Durante esta fase, los estudiantes trabajarán con la ley de recurrencia entre los números de Padovan, explorando sus identidades y sustituyendo estos términos en la fórmula de recurrencia, encontrando un patrón para las pruebas de Identidad 1 y Teorema 1.

En ese momento, los estudiantes pueden tomar notas de datos que pueden contribuir a las construcciones, no necesariamente con conceptos matemáticos formales, ya que es posible que se olviden durante la resolución de esta situación didáctica.

En la fase de validación, los estudiantes deben demostrar las sumas de las Identidades 1 y el Teorema 1 representadas por los resultados:

$Pa_n^2 = 2Pa_{n-2}^2 + 2Pa_{n-3}^2 - Pa_{n-7}^2$ e $Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n-1} \cdot Pa_n$
en base a las observaciones de las Figuras 3 y 4.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

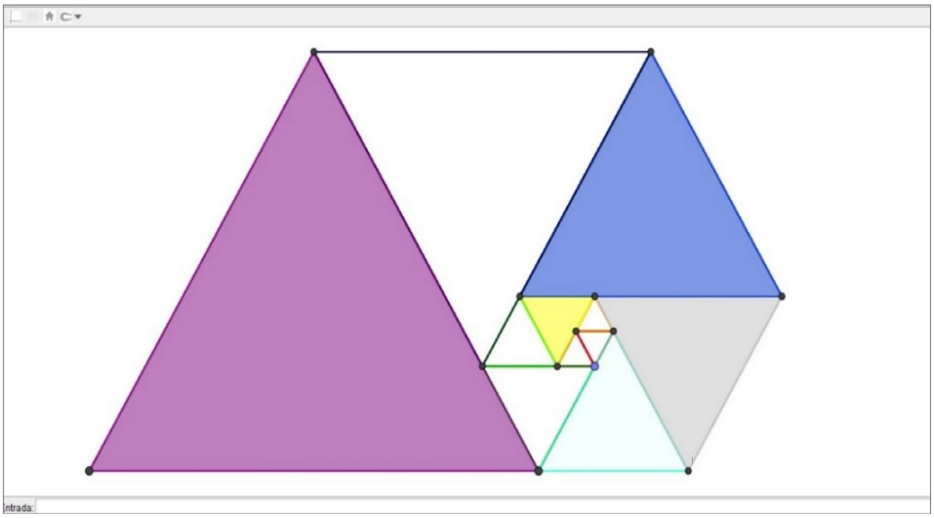

Figura 3. Representación geométrica de la Identidad 1. Fuente: Elaboración propia (2022).

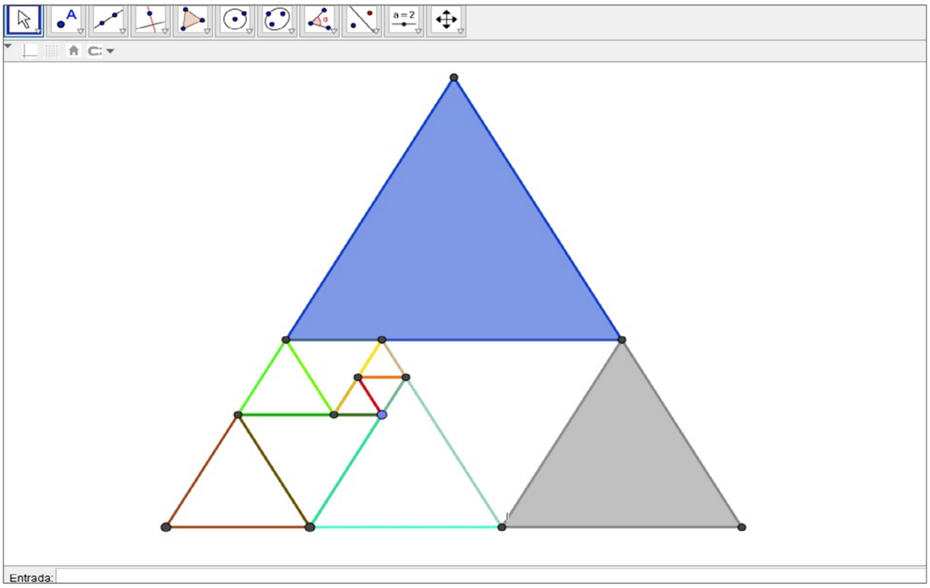

Figura 4. Representación geométrica de lo Teorema 1 Fuente: Elaboración propia (2022).

En ese momento, los estudiantes suelen encontrar obstáculos para probar las hipótesis planteadas durante la fase de formulación, es decir, para demostrar el Teorema 1 a través de la visualización geométrica.

Finalmente, en la fase de institucionalización, el docente debe intervenir en el transcurso de la situación didáctica y verificar las respuestas de los estudiantes, enfatizando que a través de una Figura se pueden probar las dos identidades, haciendo una conexión entre ellas y generando una nueva visualización geométrica, por las propiedades propuestas.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

El docente también puede mostrar que la Figura 2, resaltada en la fase de acción, es una idea de representar los términos de la secuencia de Padovan a través de triángulos equiláteros, con énfasis en la forma de una espiral, que también se puede construir en otra dirección.

A partir de la información adquirida durante la situación didáctica 1, y con los conocimientos previos de los alumnos, presentamos una segunda situación didáctica, ahora centrada en la enseñanza de la secuencia de Perrin.

Situación didáctica 2: ¿Cuáles son las relaciones entre los números de Perrin y los números de Padovan?

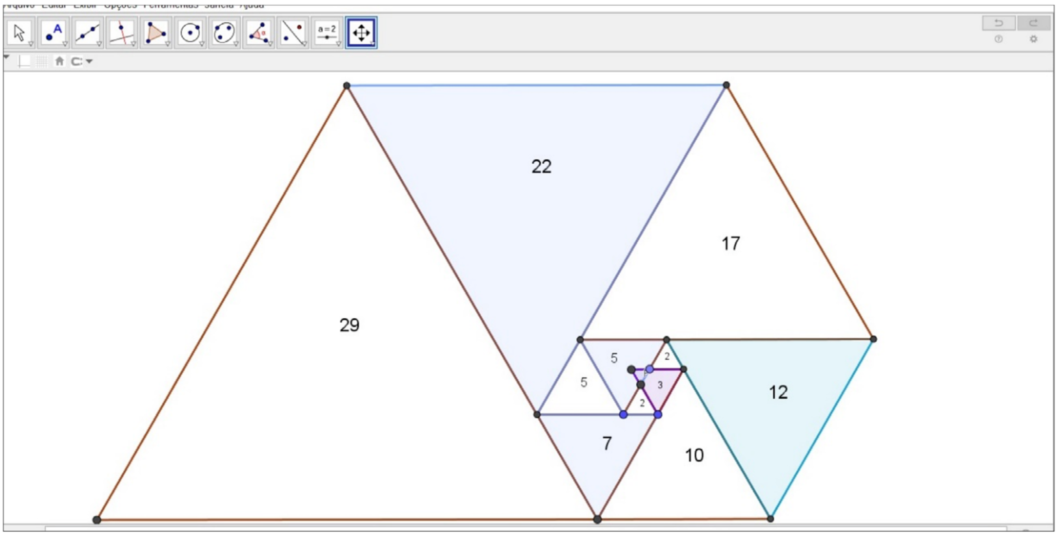

Figura 5. Representación geométrica de la secuencia de Perrin. Fuente: Elaboración propia (2022).

En esta segunda situación didáctica, en la situación de acción, se debe presentar la ley de recurrencia de los números de Perrin. Se espera que los estudiantes asocien estos números con los lados del triángulo equilátero que se muestra en la Figura 5, observando las relaciones que se pueden encontrar a partir de su área.

Por lo tanto, durante la situación de formulación, se espera que los estudiantes trabajen con la relación entre los números de Perrin, explorando el número plástico. En este punto, a los estudiantes les resultará difícil determinar el punto en el que convergen los términos de la sucesión en relación con el número plástico.

En la fase de validación, los alumnos deberán demostrar las similitudes entre las sucesiones de Perrin y Padovan, relacionando su ley de recurrencia, el concepto de número plástico y la imagen visualizada en GeoGebra.

En la fase de institucionalización, el docente debe retomar el control de la situación didáctica, validando las respuestas de los alumnos y corrigiendo los errores, si los hubiere.

Es importante que el docente enfatice el número plástico como factor esencial para el estudio de las dos secuencias y que las imágenes propuestas a través de la visualización geométrica sean importantes para futuros estudios.

En el siguiente apartado, recogemos datos referentes a la aplicación de las dos situaciones didácticas, con el fin de validar internamente los resultados, es decir, a partir del comportamiento de los alumnos durante su resolución.

5. Experimentación

Luego de los pasos mencionados anteriormente, experimentamos con situaciones didácticas, recolectando datos sobre el desarrollo de los estudiantes a través de la práctica propuesta, a partir de la observación de elementos importantes en un contexto didáctico-metodológico. En esta fase de ED, realizamos tres encuentros para aplicar las situaciones didácticas, buscando poner en práctica lo planificado en el análisis a priori.

Así, recolectamos y organizamos un corpus de investigación variado, compuesto por las producciones de los estudiantes, registro de preguntas, conjeturas y errores encontrados durante el seguimiento de sus acciones. El análisis de este material es fundamental para la etapa de validación (Carneiro, 2005).

Las situaciones didácticas se desarrollaron en tres momentos de cincuenta (50) minutos cada uno, con un grupo de cuatro estudiantes denominados E1, E2, E3 y E4, matriculados en la disciplina Historia de las Matemáticas, del Instituto Federal de Educación, Ciencias y Tecnologías do Ceará (IFCE), campus de Fortaleza, en el primer semestre de 2022. Estas actividades fueron incorporadas a la disciplina mencionada, en la carrera de Licenciatura en Matemáticas.

El experimento se desarrolló de la siguiente manera:

- en la primera reunión: se formalizó el contrato didáctico, así como el contexto histórico en relación con las secuencias de Padovan y Perrin;
- en el segundo encuentro: aplicación de la situación didáctica 1;
- en el tercer encuentro: aplicación de la situación didáctica 2.

El contrato didáctico propuesto establece un acuerdo de convivencia con los alumnos participantes, que es "una relación que determina –en pequeña medida de forma explícita, pero mayoritariamente implícita– lo que cada socio, profesor y alumno es responsable de gestionar y por lo que, en una de una manera u otra, responsable ante el otro" (Brousseau, 1986, en Almouloud, 2007, p. 89).

Además, en este contrato hay pocas reglas evidentes, mientras que "las implícitas se elaboran a partir de la naturaleza intrínseca de las Matemáticas, como el formalismo, la abstracción y el rigor, además de considerar las habituales diferencias en las concepciones de los profesores de Matemáticas" (Oliveira, 2018, p. 38).

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

En cuanto al recurso tecnológico utilizado, elegimos GeoGebra, ya que según Ribeiro y Souza (2016), este software es una herramienta dinámica que propone una interacción al proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del control de las acciones desarrolladas durante el proceso de estudio de manera gradual, de acuerdo con la necesidad del estudiante.

Esta herramienta tiende a crear elementos de manipulación y visualización a través de construcciones geométricas que permiten el aprendizaje de un determinado contenido, pudiendo mover e interactuar con objetos a través de la pantalla de la computadora o de los teléfonos celulares. Además, GeoGebra "fomenta la continuación de la búsqueda de comprensión del objeto de estudio, ya que el propio software ayuda en la percepción visual y dinámica de las acciones, que son manipuladas con cierta permisividad" (Ribeiro y Souza, 2016, p. 3). Así, este recurso puede ser utilizado por los estudiantes cuando lo que se pretende construir no es posible o factible de concebir sólo con lápiz y papel.

Los instrumentos para la recolección de datos fueron una grabadora y un teléfono celular, con el fin de capturar las imágenes, audios y videos de los estudiantes durante la resolución de situaciones didácticas, con su consentimiento previo y respetando la confidencialidad de sus identidades.

6. Análisis a posteriori y validación

En vista de las situaciones didácticas propuestas, discutimos la presentación de visualizaciones geométricas para las secuencias de Padovan y Perrin. Cabe destacar que los números de Padovan y Perrin en una primera dimensión están representados por la ley de la recurrencia y son lineales y, en la segunda dimensión, se forman asociando los lados de triángulos equiláteros.

En la aplicación de la situación didáctica 1, el docente exploró el contexto histórico discutido sobre las vanguardias, acercándose a la ley de recurrencia que define a los números de Padovan y su relación con el número plástico o radiante. Por lo tanto, se mostró la Figura 2, con el fin de que los estudiantes observaran las construcciones de los nueve primeros términos de la secuencia de Padovan, para estimular la resolución de la situación didáctica propuesta.

A partir de la visualización de la (Figura 2), los estudiantes asociaron los números de Padovan al lado de cada triángulo equilátero en el que, a medida que ocurre la construcción de cada término de la secuencia, se constituye la espiral de Padovan, superación de los obstáculos previstos en el análisis a *priori*. En la fase de acción, en la que se pidió a los estudiantes que demostraran el área del triángulo equilátero como ayuda para la prueba de identidades, tenemos la presentación de E1, en la Figura 6.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

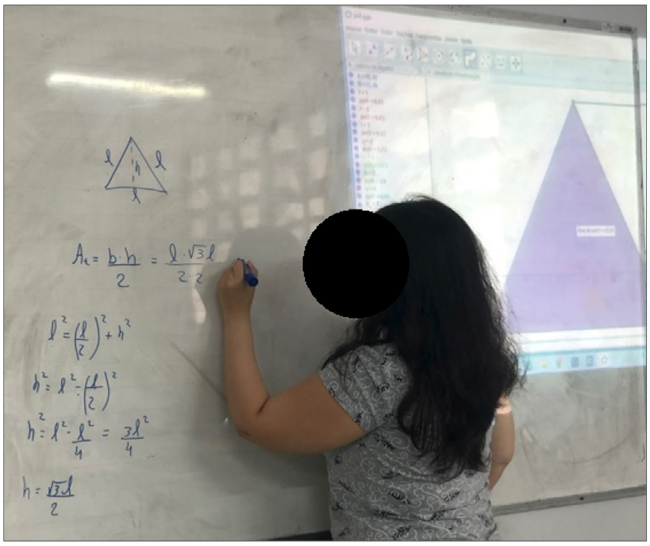

Figura 6. Etapa de acción del estudiante E1. Fuente: Datos de la investigación (2022).

Con la demostración de la Figura 6, se consideró una constante para el valor de $\sqrt{3/4}$, llamada de C, para proporcionar prueba de la identidad propuesta. Luego, para formular las conjeturas de los estudiantes, presentamos la (Figura 3), con el propósito de definir una identidad para los términos de la sucesión de Padovan teniendo como condición $n \geq 7$.

Esta información ayudó a comprender estas identidades. Así, se solicitó a los estudiantes elegir un valor para ser aplicado en el cálculo de la identidad, teniendo en cuenta la condición de existencia (Figuras 7 y 8), para formular hipótesis para la construcción del conocimiento, caracterizando la fase de formulación, encontrando subsidios para la demostración de la Identidad 1 que involucre el área del triángulo equilátero:

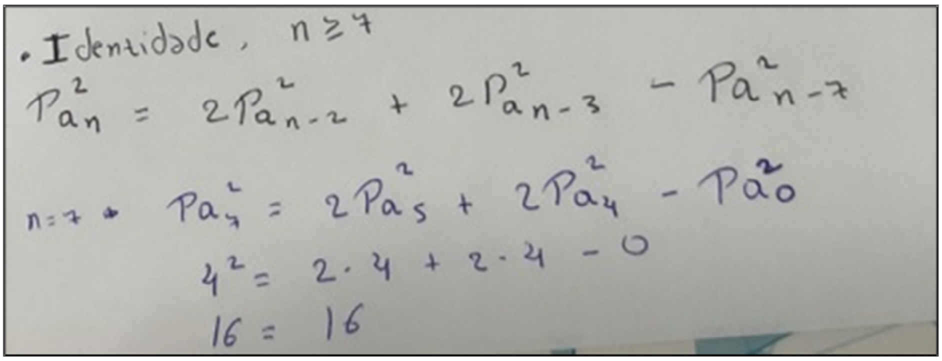

Figura 7. Formulación del Estudiante E2. Fuente: Datos de la investigación (2022).

En la formulación realizada por el estudiante E2 (Figura 7), el estudiante adoptó el valor $n = 7$, para mostrar algebraicamente la información propuesta en la Figura 3. Sin embargo, el estudiante E3 eligió un valor diferente, el cual fue $n = 11$ (Figura 8):

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

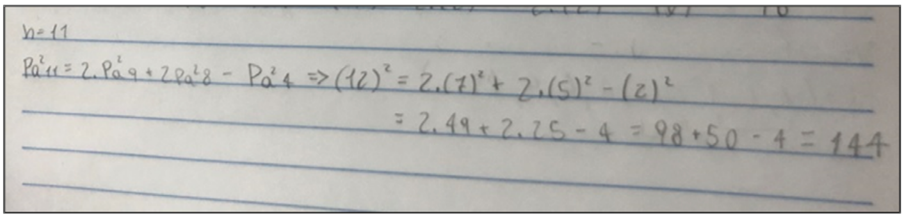

Figura 8. Fase de Formulación del Estudiante E3. Fuente: Datos de la investigación (2022).

Después de los cálculos realizados por los estudiantes E1 y E2, el estudiante E4 hizo la siguiente declaración:

> Entonces maestro, ¿quiere decir que para determinar el siguiente término, en este caso el undécimo término, será la suma de los dos tiempos de los términos nueve y ocho, menos el término cuatro? De esta forma, podemos ver que los términos ocho y nueve en los triángulos no están llenos, pero el cuarto triángulo está (E4).

Al poco tiempo, el profesor confirmó la información y preguntó: "Basándonos en esta idea que acabas de hablar, ¿cómo podemos representar usando el área del triángulo equilátero?". El estudiante entonces dijo:

> Solo agrega la constante c en todos los términos de la identidad, $c \cdot Pa_n^2 = 2 \cdot cPa_{n-2}^2 + 2 \cdot cPa_{n-3}^2 - c \cdot Pa_{n-7}^2$

Para validar esta afirmación, el docente le pide al estudiante E4 que lo demuestre usando una nueva propiedad, es decir, el Teorema 1, con base en la Figura 4. Lo que se sigue muestra la relación de los primeros nueve términos de la secuencia en una representación geométrica.

En el Teorema 1 se propone la suma del cuadrado de dos términos consecutivos, que se puede representar mediante la siguiente relación $Pa_n^2 + Pa_{n-1}^2 = Pa_{n+2}^2 - 2Pa_{n-1} \cdot Pa_n$ para $n \geq 11$. En este caso, E4 desarrolló la demostración de este Teorema utilizando el área de triángulos, como se muestra en las Figuras 9 y 10:

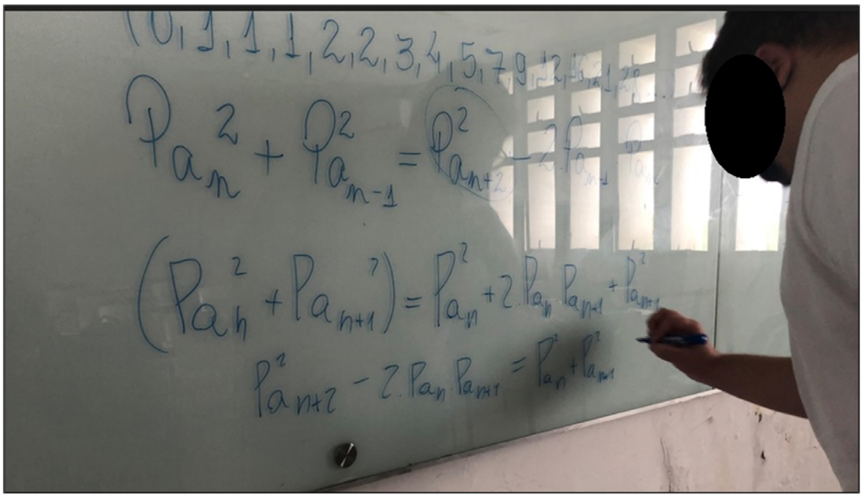

Figura 9. Validación del estudiante E4 (parte 1). Fuente: Datos de la investigación (2022).

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

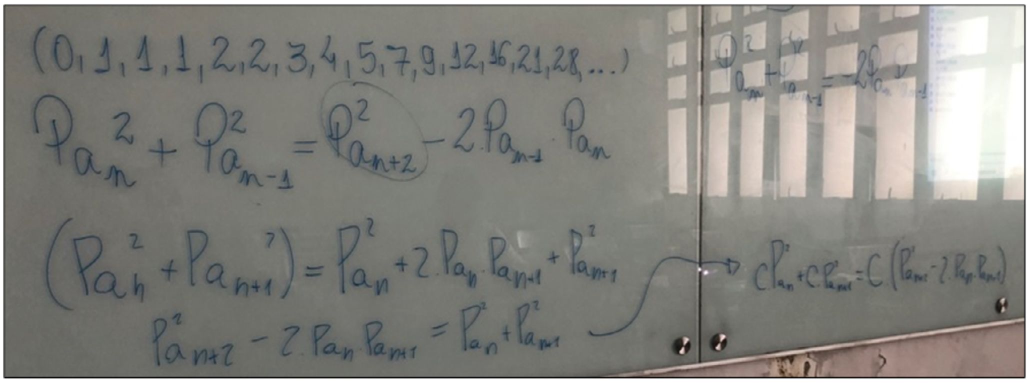

Figura 10. Validación del estudiante E4 (parte 2). Fuente: Datos de la investigación (2022).

Por tanto, la demostración del Teorema 1 explorado valida el hecho de que existe una relación entre los números de Padovan y el área del triángulo equilátero, lográndose el objetivo de la propuesta realizada en la situación didáctica 1. En la fase de institucionalización, el docente muestra la Figura 11, que corresponde a la representación geométrica del Teorema 1:

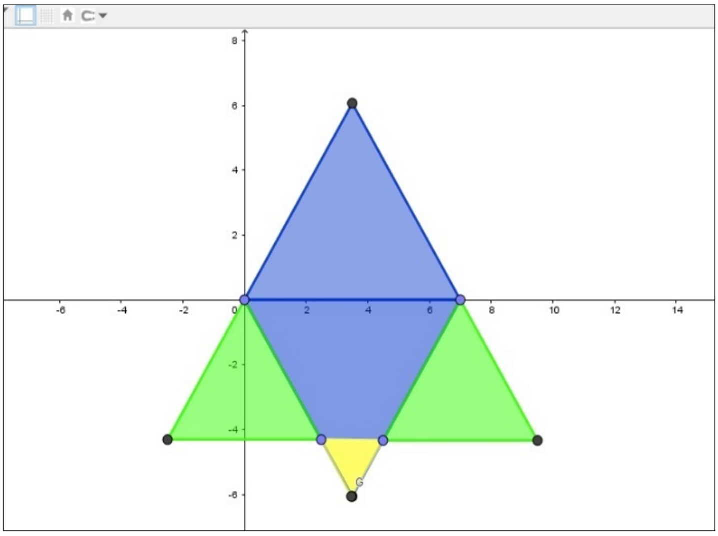

Figura 11. Representación Geométrica del Teorema 1. Fuente: Datos de la investigación (2022).

Luego de la presentación y discusión de aspectos de la Figura 11, los estudiantes lograron visualizar el Teorema 1 a través de triángulos, relacionándolos con la Figura 4 y la 10, presentadas en la validación de la situación didáctica propuesta. En ese momento, el profesor explicó que hay otras identidades que también se pueden demostrar con la constante C. De hecho, la situación didáctica 1 permitió establecer la relación entre la secuencia de Perrin y Padovan, que se estableció casi de inmediato.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

En la propuesta de situación didáctica 2, el docente presentó la Figura 5, que muestra la secuencia de Perrin en una visualización bidimensional utilizando el software GeoGebra con un breve contexto histórico sobre Perrin y la creación de esta secuencia.

Con base en esta información, en la fase de acción, los estudiantes, al observar la Figura 5, buscaron asociarla con la ley de recurrencia: $Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3} \;\; n \geq 3$. Luego de estas observaciones, para formular las hipótesis, el estudiante E4 calculó algunos términos de la sucesión de Perrin, considerando que $Pe_0 = 3, Pe_1 = 0, Pe_2 = 2$, de acuerdo con la Figura 12:

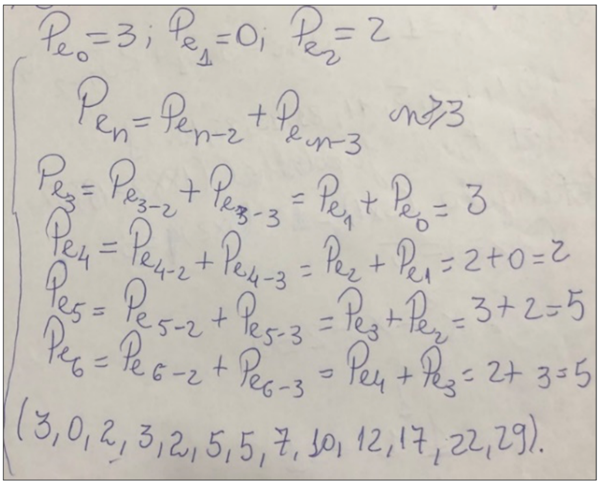

Figura 12. Los trece términos iniciales de la sucesión de Perrin. Fuente: Datos de la investigación (2022).

En vista de la información presentada en la Figura 12 y de las observaciones durante las fases de acción y formulación, el profesor preguntó: Con estos primeros quince términos de la sucesión de Perrin, ¿cuál es el valor de la razón entre los términos de esta sucesión y a qué momento en que converge?

A partir de este cuestionamiento, se generó una interacción entre los estudiantes para poder responderlo. Después de unos momentos, el estudiante E3 afirma que la razón es 1.32, que es una superación del obstáculo previsto en la fase de concepción y análisis a priori de la situación didáctica. El docente preguntó si este resultado es correcto y los estudiantes dijeron que no. Con base en lo presentado por los estudiantes, se construyó la razón entre los términos de la secuencia de Perrin utilizando GeoGebra (Figura 13):

	A	B
1	NÚMEROS DE PERRIN	RAZÃO
2	3	
3	0	0
4	2	∞
5	3	1.5
6	2	0.6666666667
7	5	2.5
8	5	1
9	7	1.4
10	10	1.4285714286
11	12	1.2
12	17	1.4166666667
13	22	1.2941176471
14	29	1.3181818182
15	39	1.3448275862
16	51	1.3076923077
17	68	1.3333333333
18	90	1.3235294118
19	119	1.3222222222
20	158	1.3277310924
21	209	1.3227848101

Figura 13. Razón entre los términos de la secuencia de Perrin. Fuente: Datos de la investigación (2022).

El cálculo de la razón, como se muestra en la Figura 13, muestra que esta sucesión comienza a converger en el decimoséptimo término, hecho observado por el estudiante E1. Este es el valor del número plástico, que también está presente en la relación de términos de Padovan. Entonces el mismo estudiante dice:

> Profesor, la ley de recurrencia de Perrin es igual a la de Padovan, solo cambia los términos iniciales, las dos secuencias tienen la razón de los términos relacionada con el número plástico, y ambas se representan geométricamente con triángulos equiláteros. Entonces podemos hacer esta relación, de la misma manera que relacionamos la secuencia de Fibonacci con la secuencia de Lucas (E1).

Concluimos que estos argumentos pueden ser considerados como la validación de la situación didáctica 2, ya que los estudiantes lograron asociar la información de forma coherente, alcanzando el objetivo planteado.

Finalmente, en la fase de institucionalización, el profesor recuperó el control de la situación didáctica, explicando que algunos estudiosos afirman que esa relación es importante para la prueba de las identidades de Perrin, lo que puede ocurrir de inmediato.

Por tanto, se pudo constatar la validación interna de estas situaciones didácticas a partir del comportamiento de los estudiantes y de las observaciones que atestiguan su desarrollo a través de la actividad propuesta, corroborando con lo previsto por la Ingeniería Didáctica estructurada. Es posible observar la confrontación entre el análisis a priori y el análisis posterior,

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

a partir de una comparación entre lo propuesto y lo realizado, reflexionando sobre posibles mejoras en el experimento, así como vislumbrando posibilidades de replicación del estudio involucrando estas secuencias.

Consideraciones finales

En esta investigación, desarrollamos situaciones didácticas para la transposición de las secuencias de Padovan y Perrin, involucrando visualizaciones geométricas en la discusión de elementos importantes de esas sucesiones durante una clase práctica. Utilizando algunas características de la secuencia de Fibonacci, observamos algunas similitudes en su definición, así como otras características encontradas en las secuencias de Padovan y Perrin, que a su vez son menos exploradas en el estudio de la disciplina Historia de las Matemáticas.

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación trajo un marco teórico sobre las dificultades encontradas en el proceso de enseñanza de estas secuencias, proporcionando una alternativa para la planificación de los profesores y dando la debida importancia a las secuencias de recurrencia.

Durante este trabajo analizamos las definiciones de las sucesiones de Padovan y Perrin con sus particularidades, apoyados en GeoGebra, mostrando una alternativa para su enseñanza con el uso de la tecnología. De esta forma, consideramos que se cumplió el objetivo, ya que se desarrollaron con éxito las secuencias y se recogieron sus resultados, permitiéndonos reflexionar sobre la práctica. Las situaciones didácticas trajeron el planteamiento de una identidad y un teorema, así como la relación del número plástico con las secuencias, siendo validadas a través de las construcciones geométricas y sus respectivos conceptos matemáticos.

Además, se destacaron los aspectos históricos, didácticos, epistemológicos y cognitivos, que pueden servir para un estudio más complejo en los cursos de formación inicial de profesores de Matemáticas, presentando una propuesta para el menú de la asignatura Historia de las Matemáticas que contempla dichos temas.

Así, estimular la comprensión de los estudiantes de los aspectos históricos y matemáticos de estas secuencias fue posible tanto por la Teoría de las Situaciones Didácticas como por la estructuración de este trabajo con la Ingeniería Didáctica, usada en conjunto, superación de los posibles obstáculos encontrados durante el desarrollo de las situaciones didácticas propuestas.

Destacamos que el propósito de esta propuesta fue, sobre todo, contribuir al desarrollo de otras ideas de prácticas docentes con las secuencias de Padovan y Perrin utilizando GeoGebra, o incluso otras secuencias y sus identidades, siendo un aporte para trabajos futuros.

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159

Referencias

Adams, W. y Shanks, D. (1982). Strong primality tests that are not sufficient. *Mathematics of Computation, 39*(159), 255-300. https://shorturl.at/oSW34

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.

Almouloud, S. y Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 3*(1), 62-77. https://doi.org/kwcv

Alves, F. R. V. (2014). Engenharia didática para o teorema da função implícita: análises preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 7*(3), 148-168. https://doi.org/kwcx

Alves, F. R. V. y Dias, M. A. (2017). Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 12*(2), 192-209. https://doi.org/kwcz

Alves, F. R. V. (2018). Engenharia Didática para o ensino de variável complexa: Visualização de conceitos relacionados ao processo matemática de integração. *Alexandria-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 11*(2), 3-29. https://doi.org/kwc2

Alves, F. R. V. y Catarino, P. M. (2018). Engenharia Didática de 2° geração com o tema: h(x)-polinômios de Jacobsthal. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista, 8*(3), 28-55. https://shorturl.at/aejKT

Artigue, M. (1984). Modélisation et reproductibilité en didactiques de mathématiques. *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques, 8*(1), 1-38.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. Recherches en didactique des mathématiques. *Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 9*(3), 281-308.

Artigue, M. (1995). Ingenieria Didática. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gomez (Eds.), *Ingeniéria didática em Educacion Matemática* (pp. 33-61). *Grupo Editorial Iberoamérica*. https://shorturl.at/gxKQW

Borba, M. C. (2011/2013). Educação matemática a distância online: Balanço e *perspectivas. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 349-358.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherchesen Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique de mathématiques, 1970–1990*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Ática.

Carneiro, V. C. G. (2005). Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. *Zetetike, Campinas SP., 13*(1), 87-120. https://shorturl.at/egEM5

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gomez (Org.), *Ingenieria Didactica en educación matemática* (pp. 1+-7). Grupo Editorial Iberoamericano. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Edgar, T. y Nacin, D. (2021). A visual tour of identities for the Padovan sequence. *Math Intelligencer, 44*, 111-118 (2022). https://doi.org/kwc3

Joshua, S. y Dupin, J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Presses Universitaires de France.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia, 10*(1), 97-112. https://shorturl.at/bcKN4

Mangueira, M. C. dos S. (2022). Engenharia Didática: Um processo de Hibridização e Hiper complexificação de sequências lineares recursivas. [Dissertação (Mestrado), Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE)].

Margolinas, C. (2015). Situations, savoirs et connaissances... comme lieux de rencontre? *Formation et pratiques d'enseignement en questions, 19*, 31-39. https://revuedeshep.ch/pdf/19/2015-Margolinas-FPEQ-19.pdf

Oliveira, R. R. de. (2018). *Engenharia didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais*. [Dissertação (Mestrado) —Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE)].

Pais, L. C. (2015). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Autêntica.

Pinheiro, C. P. S. R. y Alves, F. R. V. (2021). Engenharia Didática para a visualização da sequência de Padovan por meio do software GeoGebra. *ROCA. Revista Científico-Educacional de la Provincia Granma, 18*(1), 467-487.

Ribeiro, T. N. y Souza, D.N. (2016). A utilização do software GeoGebra como ferramenta pedagógica na construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS). *ReviSeM. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática,* (1), 36-51. http://funes.uniandes.edu.co/29989/1/Ribeiro2016A.pdf

Stewart, I. (2000). Univers des nombres. Belin - Pour la Science.

Sugumaran, A. y Rajesh, K. (2017). Perrin graceful graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 114*(6), 131–137. https://acadpubl.eu/jsi/2017-114-5/articles/2/14.pdf

Teixeira, P. J. M. y Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetiké, 21*(39), 155-168. https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602

Vieira, R.P.M. y Alves, F.R.V. (2020). Engenharia Didática e sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e a priori. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(59), 227-251. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/63

Pinheiro, C. P. S. R., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. M. (2023). Una Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las secuencias de Padovan y Perrin con el software GeoGebra. *Didacticae*, (14), 137-159. https://doi.org/10.1344/did.2023.14.137-159