DIDACTICAE | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.41767

ARTÍCULO

Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas

Recepción: 17/01/2023 | Revisión: 04/07/2023 | Aceptación: 11/07/2024 | Publicación: 01/03/2024

Renata Teófilo de SOUSA
Secretaría de Educación del Estado de Ceará (SEDUC)
rtsnaty@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

Francisco Régis Vieira ALVES
Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará
fregis@ifce.edu.br
http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Resumen: Existen lagunas en la formación del profesorado de matemáticas sobre la parábola y un escaso abordaje del tema en la Educación Básica y Superior brasilera, especialmente con el uso de la tecnología. Así, nos preguntamos: ¿Cómo puede la Teoría de las Situaciones Didácticas proporcionar la construcción de un modelo didáctico para enseñar el concepto de parábola? Este trabajo es el resultado de una experiencia piloto en un curso de maestría que aborda la parábola desde diferentes puntos de vista. El objetivo es identificar posibles obstáculos didácticos en su enseñanza a partir de un análisis de manifestaciones intuitivas en una situación didáctica con apoyo del GeoGebra. Utilizamos la Teoría de las Situaciones Didácticas en la estructuración de la sesión de enseñanza y las Categorías del Razonamiento Intuitivo para el análisis de los datos recolectados. La metodología fue la Ingeniería Didáctica, la cual fue experimentada con un alumno de la Licenciatura en Matemáticas. La observación y la recolección de datos nos proporcionaron elementos para el análisis a posteriori y la validación del experimento, en el que verificamos la necesidad de discutir la parábola, articulando sus visiones geométrica, algebraica y analítica, así como el uso de la tecnología en su enseñanza.

Palabras clave: parábolas; GeoGebra; intuición; formación inicial del profesorado.

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

PARÀBOLES I RAONAMENT INTUÏTIU: UNA EXPERIÈNCIA PILOT RECOLZADA EN LA DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES

Resum: *Existeixen llacunes en la formació del professorat de matemàtiques sobre la paràbola a més d'un escàs abordatge del tema en l'Educació Bàsica i Superior brasilera, especialment amb l'ús de la tecnologia. Per tant, ens preguntem: Com pot la Teoria de les Situacions Didàctiques proporcionar la construcció d'un model didàctic per ensenyar el concepte de paràbola? Aquest treball és el resultat d'una experiència pilot en un curs de Formació del professorat que aborda la paràbola des de diferents punts de vista. L'objectiu és identificar possibles obstacles didàctics en el seu ensenyament a partir d'una anàlisi de manifestacions intuïtives en una situació didàctica amb suport del GeoGebra. Utilitzem la Teoria de les Situacions Didàctiques en l'estructuració de la sessió d'ensenyament i les Categories del Raonament Intuïtiu per a l'anàlisi de les dades recollides. La metodologia va ser l'Enginyeria Didàctica, la qual va ser experimentada amb un alumne de la Llicenciatura en Matemàtiques. L'observació i la recol·lecció de dades ens van proporcionar elements per a l'anàlisi a posteriori i la validació de l'experiment, en el qual verifiquem la necessitat de discutir la paràbola, articulant les seves visions geomètrica, algebraica i analítica, així com l'ús de la tecnologia en el seu ensenyament.*

Paraules clau*: paràboles; GeoGebra; intuïció; formació inicial del professorat.*

PARABOLAS AND INTUITIVE REASONING: A PILOT EXPERIENCE SUPPORTED BY THE DIDACTICS OF MATHEMATICS

Abstract: *There exist gaps in the training of mathematics teachers on the parabola as well as scarce attention on the subject in Brazilian Basic and Higher Education, especially with the use of technology. Thus, we ask ourselves: How can the Theory of Didactic Situations provide the construction of a didactic model to teach the concept of parabola? This work is the result of a pilot experience in a master's course which approaches the parabola from different points of view. The objective is to identify possible didactic obstacles based on an analysis of intuitive manifestations in a didactic situation with the support of GeoGebra. We used the Theory of Didactic Situations in the structuring of the teaching session and the Categories of Intuitive Reasoning for the analysis of the collected data. The Didactic Engineering methodology was followed, which was experimented with a student of the Bachelor's Degree in Mathematics. Observation and data collection provided us with elements for a post hoci analysis and validation of the experiment, in which we verified the need to discuss the parabola articulating its geometric, algebraic and analytical views, as well as the use of technology in its teaching.*

Keywords: *parabolas; GeoGebra; intuition; initial teacher training*

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-20. https://doi.org/10.1344/did.41767

Introducción

La parábola tiene gran relevancia en el desarrollo de áreas del conocimiento como Arquitectura, Física, Ingeniería, entre otras. Sin embargo, su estudio en la Educación Básica en el contexto brasileño ha sido explorado de forma puramente algebraica, bajo un enfoque fragmentado y poco contextualizado, lo que ha generado dificultades en niveles posteriores, como la Educación Superior (Cerqueira, 2015; Siqueira, 2016; Vargas y Leivas, 2019).

Maioli et al. (2012) explican que, a pesar de la fuerte presencia de las matemáticas en nuestra vida cotidiana, en ocasiones resulta difícil mostrar al alumnado con claridad las aplicaciones reales de las materias cursadas en la escuela o demostrar situaciones que involucran visualizaciones geométricas sin un soporte tecnológico. A partir de ello, realizamos una experiencia piloto en formación inicial como forma de comprender algunas de las dificultades que atraviesa el trabajo de los profesores de matemáticas con esta temática, sus particularidades y posibilidades de exploración con el software GeoGebra.

El software GeoGebra es un entorno de Geometría Dinámica que permite la creación, visualización y manipulación de representaciones de conceptos matemáticos, tratando de forma interconectada la Geometría, el Álgebra y el Cálculo, entre otras posibilidades. Así, el software puede facilitar el descubrimiento de relaciones entre los objetos que componen una construcción geométrica (Alves, 2019).

Este trabajo es un extracto de una disertación de maestría realizada en Brasil, en la cual discutimos la parábola, buscando explorar y articular sus visiones algebraicas, geométricas y analíticas con el aporte de GeoGebra, a partir de la discusión de sus particularidades y la interrelación entre tópicos de las matemáticas que lo abordan. Así, nos preguntamos: ¿Cómo puede la Teoría de las Situaciones Didácticas proporcionar la construcción de un modelo didáctico con el objetivo de enseñar el concepto de parábola? En ese sentido, nos planteamos el objetivo de reconocer obstáculos didácticos en la enseñanza de parábolas a partir de manifestaciones intuitivas en la resolución de una situación didáctica con el apoyo de GeoGebra.

Para ello, la metodología adoptada fue la Ingeniería Didáctica (IE) (Artigue, 1988). Utilizamos en conjunto la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986), dada la compatibilidad entre IE y TSD, ambas teorías de origen francófono. Además de estas, también adoptamos las Categorías del Razonamiento Intuitivo (CRI) (Fischbein, 1987) para analizar la interacción del sujeto con la situación didáctica y los datos relacionados con este proceso. TSD y CRI fueron necesarios para estructurar el experimento dentro de la Ingeniería Didáctica desarrollada.

La experiencia piloto tuvo como sujeto a un estudiante de la Licenciatura en Matemáticas, perteneciente al 6.º semestre de una universidad brasileña, en el formato presencial. Cabe mencionar que este estudiante no fue participante directo de la investigación de campo de la disertación, sino un participante voluntario invitado a colaborar brindando datos que permitieran un análisis de las variables didácticas del estudio. Se probaron las variables didácticas preestablecidas en este ID para verificar la viabilidad del experimento. Los datos fueron recolectados en forma de fotografías, grabaciones de audio y vídeo, registros de construcción en GeoGebra y material escrito.

DIDACTICAE | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.41767

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

1. Marco teórico

Aquí exponemos una breve discusión del aporte teórico-conceptual, fundamental para estructurar la experiencia piloto desarrollada. Discutimos la Teoría de las Situaciones Didácticas como teoría de la enseñanza y el concepto de obstáculo didáctico según Brousseau. También desarrollamos la discusión sobre las Categorías del Razonamiento Intuitivo como base para la observación y análisis de datos y buscamos establecer una relación entre estas.

1.1 Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) proporciona un modelo teórico que pretende comprender la relación dialéctica que se establece entre los principales actores de un sistema didáctico –el profesor, el alumno y el saber–, así como los medios en los que se da la coyuntura de producirse una situación didáctica. En base a esto, el TSD pretende incentivar al estudiantado a comportarse como un investigador que, a partir de un conjunto de dialécticas, pueda desarrollar y ser capaz de formular hipótesis y conceptos, mientras que el profesorado brinda situaciones favorables para que el estudiantado, al actuar, pueda transformarlos en conocimiento para sí mismo.

Brousseau (2008) explica que el aprendizaje de un estudiante deriva de su adaptación a un medio entrelazado con contradicciones, dificultades y desequilibrios. El conocimiento resultante de esta adaptación se manifiesta a través de nuevas respuestas que, a su vez, proporcionan evidencia de aprendizaje. Así, entendemos que la autonomía del alumnado se desarrolla a través de la toma de decisiones, la reflexión, la organización de ideas y estrategias a partir de sus conocimientos previos, siempre que el medio sea preparado por el docente para que se produzcan dichos desequilibrios y su consecuente búsqueda de la comprensión y la aprehensión del conocimiento. Partiendo de esta premisa, el alumnado es consciente de que la situación-problema fue escogida para incentivarlo a adquirir nuevos conocimientos, lo cual está plenamente justificado por la lógica interna de la situación y que, posiblemente, exige razones didácticas para construirla.

Otro punto importante es el fomento de la cooperación entre estudiantes y docentes como relación que desarrolla capacidades para la aprehensión del conocimiento, además de promover la integración de la clase. Para que dicha integración, basada en las relaciones entre los involucrados, sea beneficiosa, Brousseau (1986) enfatiza que estas deben ser establecidas por lo que él llama un contrato didáctico, el cual consiste en un conjunto recíproco de conductas esperadas en la relación profesor-alumno, mediadas por el saber.

El TSD organiza el proceso de aprendizaje del alumno a partir de fases o dialécticas que son acción, formulación, validación e institucionalización, considerándose las tres primeras situaciones adidácticas. Sintetizamos a continuación estas dialécticas, según las ideas de Brousseau (2002, 2008):

i) *Situación de acción:* el alumno se enfrenta al problema y, en posesión de este, busca en sus conocimientos previos y en su interacción con el entorno elementos que le ayuden en la búsqueda de un camino a seguir hasta la correcta solución del problema propuesto.

ii) *Situación de formulación:* hay un intercambio de información entre el estudiante y el medio. Es el momento de exponer las ideas de forma clara y verbalizada, pero sin la obligación de utilizar un lenguaje matemático riguroso y/o formalizado. De esta forma, el alumno perfila estrategias y comienza a apropiarse de conocimientos.

iii) *Situación de validación:* el estudiante presenta su estrategia de solución a los demás involucrados y trata de argumentar con base en su razonamiento, verificando si lo que conjeturó es, de hecho, válido. La validación es el paso en el que convencemos a los interlocutores sobre la veracidad, o no, de los argumentos presentados para la solución. Es importante buscar el uso de un lenguaje y mecanismos de evidencia más formalizados.

iv) *Situación de institucionalización:* en esta fase interviene la figura del docente para realizar una síntesis de lo expuesto y discutido por los estudiantes en las etapas anteriores, de manera formal y con lenguaje matemático adecuado, eliminando modelos contradictorios o inadecuados que hayan podido surgir en las etapas previas.

Al analizar estas dialécticas desde la perspectiva de Brousseau (2002, 2008), el momento en que el estudiantado construye el conocimiento se da en la situación adidáctica, que comprende las tres primeras fases del TSD, diseñadas para que el estudiantado interactúe con el entorno sin intervención del profesor. La institucionalización, por su parte, se muestra como parte integrante de la transformación del *conocimiento* –simple familiaridad, pero no intimidad con el objeto de estúdio–, en *saber* –intelectual, que admite conceptos y juicios sobre él–, a través del proceso de devolución, que se da a lo largo de la situación didáctica (Margolinas, 2015).

Brousseau (1976) distingue los obstáculos identificados en la Didáctica de las Matemáticas, dividiéndolos en *epistemológicos, didácticos, psicológicos y ontogénicos*. Aquí nos limitamos a los *obstáculos didácticos*, que a su vez están directamente relacionados con los *obstáculos epistemológicos*, en una especie de telaraña donde, para comprender la dificultad en la enseñanza (la didáctica del profesor), es necesario comprender el origen de este conocimiento y las dificultades en su construcción cognitiva.

Según Brousseau (1976), los obstáculos epistemológicos son los relacionados con la construcción del conocimiento a lo largo de la historia y la propia construcción cognitiva del estudiante. El concepto de infinito, cero, conocimiento de funciones, entre otros, son ejemplos de obstáculos epistemológicos.

Los obstáculos didácticos son aquellos que "parecen depender sólo de una elección o un proyecto del sistema educativo" (Brousseau, 1983, p. 176 apud Almouloud, 2007, p. 141). Surgen de la elección de las estrategias didácticas del profesor. El conocimiento se vuelve cuestionable en relación con su validez o, si se transmite de forma incompleta, se convierte en un obstáculo para el desarrollo de otros conceptos. Por ejemplo, respecto a los números decimales, los estudiantes no son conscientes de la extensión del conjunto de los números reales donde es muy difícil entender la existencia de números decimales infinitos entre dos números cualesquiera.

En este trabajo, buscamos comprender cómo los posibles obstáculos didácticos han permeado la enseñanza de las parábolas, a partir de los conocimientos previos presentados por el sujeto observado y las dificultades presentadas en la comprensión del tema.

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-20. https://doi.org/10.1344/did.41767

Además, para este trabajo, nos interesa el razonamiento matemático en el desarrollo de las dialécticas de la TSD. Durante mucho tiempo se consideró que el razonamiento debía concebirse como una presentación de demostraciones modelo, enseñadas por el profesor y reproducidas fielmente por los alumnos. Sin embargo, para los profesores de hoy, "el razonamiento como actividad mental no es una simple recitación de una prueba memorizada" (Brousseau y Gibel, 2005, p. 14). Los autores señalan que, en esta situación, el alumnado está sujeto a una mayor incertidumbre frente a cuestiones muy heterogéneas, mientras que el docente necesita analizar, evaluar y tomar decisiones rápidas sobre comportamientos impredecibles del alumno, que también pueden ser difíciles a explicar o utilizar, lo que hace más compleja la evaluación del aprendizaje.

De esta forma, para construir un modelo de razonamiento matemático de un sujeto a partir de la noción de situación, es necesario entender que el razonamiento atañe a un dominio que no se restringe a estructuras formales, lógicas o matemáticas, a pesar de estar constituido por un conjunto ordenado de enunciados conectados, combinados u opuestos entre sí, respetando ciertas restricciones que pueden explicitarse en la solución de un problema. En varias ocasiones, el docente dirige su interpretación respecto de las declaraciones de los alumnos, buscando adaptarlas de manera conveniente e inducida al tema tratado en clase, más que de acuerdo con las intenciones iniciales del alumnado. Así, los modelos inadecuados creados por el alumno suelen ser interpretados por el profesor como una incapacidad para razonar (Brousseau, 1997; Brousseau y Gibel, 2005). Sin embargo, debemos considerar que los estudiantes en ocasiones utilizan representaciones o conocimientos diferentes a los que pretendemos enseñarles, lo que puede ser resultado de la lógica infantil, del pensamiento natural (Piaget e Inhelder, 1978).

Según Brousseau (1997), el razonamiento puede caracterizarse por el papel que desempeña en una situación, es decir, por su función en esa situación. Así, tal función puede ser decidir sobre algo, informar, convencer o explicar. Desde esta perspectiva, la función del razonamiento varía según el tipo de situación en que se presente, teniendo una relación directa con el movimiento dialéctico dentro del TSD, es decir, si se trata de una situación de acción, formulación o validación. Así, Brousseau y Gibel (2005) buscan distinguir los niveles de razonamiento matemático, considerados más o menos degenerados, y que se adaptan a diferentes tipos de situaciones en TSD, como se resume a continuación:

(i) *Razonamiento de nivel 1 (N1)*: puede caracterizarse por un tipo de razonamiento que no se formula como tal; sin embargo, puede ser atribuido al sujeto a partir de sus acciones, y construido como modelo de esa acción, siendo considerado como un modelo implícito relacionado con la situación de acción en el TSD.

(ii) *Razonamiento de nivel 2 (N2)*: puede considerarse como un razonamiento incompleto desde el punto de vista formal, pero con lagunas que pueden ser, implícitamente, rellenadas por la actuación del alumno en una situación en la que no se justificaría una formulación completa. Este tipo de razonamiento aparece en situaciones donde la comunicación es necesaria, estando relacionado con la fase de formulación.

(iii) *Razonamiento de nivel 3 (N3)*: puede definirse como un razonamiento formal, global y concluido, basado en un conjunto de inferencias correctamente relacionadas, que hacen una mención clara de los elementos de la situación o conocimiento considerados

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

como compartidos por la clase, aunque aún no se postula que tales el razonamiento es absolutamente correcto. El razonamiento a este nivel es característico de las situaciones de validación.

El problema que se le presenta al estudiante exige soluciones o demostraciones cuya validación pueda darse independientemente de las circunstancias didácticas en las que se planteó el problema (Almouloud, 2007; Brousseau, 1986, 1997). "La solución estándar, es decir, una solución que podría producir el profesor y que se espera del alumno, tiene la forma de una secuencia de inferencias (y cálculos), que está correctamente conectada, es decir, de acuerdo con las reglas de la lógica" (Brousseau y Gibel, 2005, p. 19). Así, podemos considerar que cada etapa del razonamiento se incorpora a justificaciones lógicas y matemáticas consideradas estándar, en que su validez y pertinencia parecen ser autónomas.

Entendemos que, en la propuesta de los autores, la interpretación de las soluciones de los estudiantes debe tener en cuenta un sistema más amplio y complejo, si la intención del docente es desafiarlos, instigarlos o incluso explicar por qué tales formas de razonamiento, correctas o no, fueron producidas. Así, se recomienda que el docente considere los conocimientos previos del alumno para construir su razonamiento en una situación objetiva, porque un nuevo razonamiento se aprende cuando se promueve desde una forma particular de resolver un problema dado a una forma universal de resolver todos los problemas similares, y se integra con el conocimiento del sujeto (Brousseau y Gibel, 2005). Es decir, en una situación autónoma, el razonamiento se basa en la inducción, pero esta inducción se apoya en una cadena de inferencias que se pueden explicitar.

1.2 Categorías del razonamiento intuitivo

En cuanto a la intuición en el campo educativo, estrictamente enfocada a las Matemáticas, ha sido la agenda de discusiones a lo largo del tiempo dentro del campo de la Psicología Cognitiva y la Educación Matemática (Alves, 2016; Grande y Silva, 2013; Kidron, 2011; Pais, 1996). Podemos decir que la intuición se refiere a un producto de las representaciones que se hacen de la realidad y, en ese sentido, tiene un papel auxiliar en el proceso de aprendizaje de los alumnos, que puede ser considerado por el docente.

Fischbein (1987) afirma además que aprender una definición o prueba formal no determina absolutamente la forma en que un estudiante la entiende y la usa y, por lo tanto, "los obstáculos para la comprensión, los conceptos erróneos y las estrategias de solución inapropiadas son a menudo el efecto de influencias intuitivas" (p. 49). En Matemáticas sí hay enunciados que son aparentemente aceptables de forma simple y directa, con cierta naturalidad, o evidentes por sí mismos, mientras que en otros casos es necesaria una demostración o prueba lógica formal para que su aceptación como verdad se produzca.

En cuanto a la categorización de la intuición, Fischbein (1987) discute la articulación existente entre los distintos tipos de intuición y su relación con la solución de problemas, separándolas en lo que clasifica como Categorías de Razonamiento Intuitivo, que son: *intuiciones afirmativas, conjeturales, anticipatorias y concluyentes*, descritas brevemente en los párrafos siguientes.

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

La primera de las categorías se refiere a las *intuiciones afirmativas*, que son representaciones o interpretaciones aceptadas directamente por los seres humanos como verdades naturales, de manera evidente e intrínsecamente significativas (Fischbein, 1987), como, por ejemplo, si alguien le pregunta a un alumno qué es una línea recta, presumiblemente intentará dibujar una línea recta o un ejemplo de una línea muy tensa.

La segunda categoría se ocupa de las *intuiciones conjeturales*. Fischbein (1987) considera que en este modelo de intuición hay una perspectiva explícita de la solución de un problema, sin embargo, el sujeto no se involucra en un esfuerzo por su resolución. Es decir, este tipo de intuición se refiere a suposiciones ligadas al sentimiento de certeza. Representan declaraciones sobre eventos futuros o el curso de un evento determinado, siendo una visión global preliminar que precede a una solución analítica y completamente desarrollada.

La tercera categoría son las *intuiciones anticipatorias*. Fischbein (1987) explica que este tipo de intuición proporciona un punto de vista absoluto, anterior a la solución de un problema, que precede a la resolución analítica completamente desarrollada. El sujeto que está resolviendo el problema ve todos los pasos hacia su solución y comprende el camino que debe seguir para llegar a la respuesta esperada. Partiendo de una comprensión global de una posible forma de resolver un problema, esta intuición influye y dirige las etapas de búsqueda y construcción de la solución, donde hay una aplicación concreta de estrategias que ayudan efectivamente a identificar una solución adecuada. Además, se puede suponer que las *intuiciones anticipatorias* son estimuladas por *intuiciones afirmativas* preexistentes.

En el caso de la cuarta categoría, que son las *intuiciones concluyentes*, estas sintetizan una visión globalizada y estructurada de las ideas básicas de resolución de un problema, previamente elaboradas, dependiendo así de los otros tres tipos de intuición mencionados anteriorment. En esta categoría existe la posibilidad de generalizar la estructura matemática para los problemas propuestos y replicar el modelo de solución en situaciones similares.

Fischbein (1987, p. 64) propone un esquema, en el que trae una primera clasificación de modelos intuitivos, como se muestra a continuación:

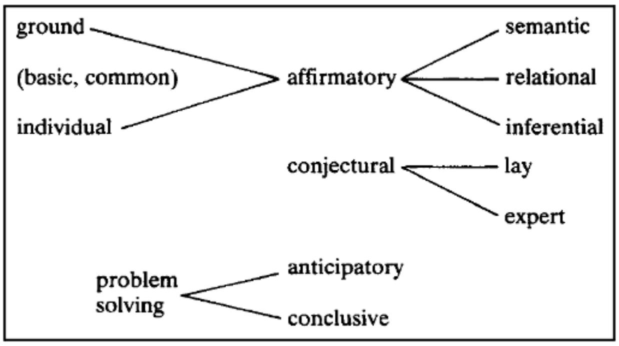

Figura 1. Esquema referente à primeira classificação da intuição. Fuente: Fischbein (1987, p. 64).

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

En el esquema de la Figura 1, el autor relaciona las intuiciones con palabras clave que nos permiten conectar la categoría intuitiva y el modelo de razonamiento que se da en su estructura. En el caso de la *intuición afirmativa*, por ejemplo, tenemos que su génesis es natural e intrínseca al individuo y que puede darse a través de estructuras deductivas o inductivas. Así, el sujeto relaciona sus conocimientos previos a través de la semántica y las inferencias, estableciendo relaciones entre lo que ya tiene como conocimiento y lo considera verdadero (aunque su modelo mental no sea el correcto).

En el caso de la *intuición conjetural*, Fischbein (1987) trae en este esquema una diferenciación entre las intuiciones producidas por legos y expertos en un tema determinado, en función de su capacidad de seleccionar información, observando sus aspectos más relevantes para construir la solución de un problema.

Finalmente, el autor considera que las *intuiciones anticipatorias* y *conclusivas* son propias de la resolución de problemas. Como señala Fischbein (1987, p. 61), tales categorías intuitivas "no establecen simplemente un hecho (aparentemente) dado. [...] aparece como un descubrimiento, como una solución a un problema y el resultado (aparentemente) repentino de un esfuerzo previo de resolución".

Fischbein (1987, 1999) en su investigación examina en detalle el proceso de enseñanza y aprendizaje al considerar que, recurrentemente, el estudiante enfrenta obstáculos en su aprendizaje, comprensión y resolución de problemas en niveles más avanzados, dado que, en ocasiones, sus técnicas de razonamiento y las estrategias están impulsadas por modelos implícitos, a veces inadecuados. En este sentido, se supone que el docente tiene la tarea de investigar y reconocer tales modelos, brindando apoyo al alumno para la mejora de sus modelos/esquemas mentales.

1.2 Relación entre la Teoría de las Situaciones y las Categorías del razonamiento intuitivo

En vista de lo expuesto en los apartados anteriores, podemos inferir una relación entre lo que Brousseau y Gibel (2005) proponen como los diferentes niveles de razonamiento matemático en el desarrollo de la Teoría de las Situaciones Didácticas, y lo que Fischbein (1987) propone en su clasificación de la intuición, en lo que denomina Categorías del Razonamiento Intuitivo. En este sentido, proponemos una correlación entre las ideas de los autores, como se muestra en el esquema de la Figura 2:

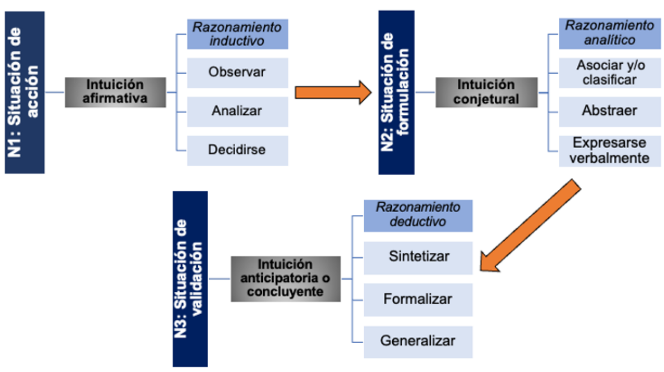

Figura 2. Relación entre niveles de razonamiento y categorías intuitivas. Fuente: Elaborado por los autores.

DIDACTICAE | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.41767

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

Cuando Brousseau y Gibel (2005) proponen el *Razonamiento de nivel 1 (N1)*, describiéndolo como un modelo de razonamiento aún no formulado pero relacionado con la posición del sujeto en una situación de acción en la TSD, podemos ver una similitud con la categoría *intuición afirmativa de Fischbein* (1987). Esta relación se puede percibir cuando Fischbein (1987) propone que el sujeto tiene una visión preliminar del problema y una visión superficial de su camino de solución, siendo capaz de observar y analizar, a partir de estructuras de pensamiento inductivo. En este nivel de razonamiento y categoría intuitiva, el estudiante aún no ha realizado ninguna acción para resolverlo, pero se encuentra en medio de conjeturas de sus hipótesis, para luego seguir un camino que tenga sentido para él.

El *Razonamiento de nivel 2 (N2)* propuesto por Brousseau y Gibel (2005) se considera inacabado desde el punto de vista formal, pero con lagunas que, implícitamente, pueden llenarse con la actuación del alumnado en una situación de formulación en la TSD. Este modelo de razonamiento se puede relacionar con las intuiciones conjeturales propuestas por Fischbein (1987), en que el alumnado parte de un razonamiento analítico sobre cada una de las partes del problema. Así, el alumnado inicia sus deducciones desde un punto de partida, pudiendo asociar, clasificar y expresarse verbalmente, formulando ideas y estableciendo un camino hacia la solución de forma más explícita.

En esta misma perspectiva, podemos entender que el *Razonamiento de nivel 3 (N3)*, definido por Brousseau y Gibel (2005) como un modelo formal, global y finalizado, que se basa en la conexión secuencial de inferencias articuladas cohesivamente (aunque tal razonamiento no sea absolutamente correcto), como un formato presentado en situaciones de validación en la TSD. Desde esta perspectiva, podemos relacionar el razonamiento de nivel 3 con lo que Fischbein (1987) propone como intuición anticipatoria y/o intuición conclusiva, dependiendo de cómo este razonamiento fue producido por el estudiante. Consideramos la *intuición anticipatoria*, dado que el estudiantado, en este curso de razonamiento, puede vislumbrar una solución analítica completamente desarrollada, presentando una lógica coherente para su solución, siendo capaz de sintetizar y formalizar una solución. También es *concluyente* si el alumnado tiene una plena comprensión y articulación entre sus conocimientos previos y el desarrollo de nuevos conocimientos a partir de la movilización del razonamiento deductivo. Esto puede establecer una estandarización y una generalización de su solución para situaciones similares a las anteriores, y esta generalización es validada por el docente en una situación posterior de institucionalización.

De esta forma, entendemos que tanto los niveles de razonamiento propuestos por Brousseau y Gibel (2005) como las categorías establecidas por Fischbein (1987) muestran que el camino de aprendizaje de un nuevo razonamiento se da cuando se promueve desde un único medio particular de resolución de un problema para un medio universal de resolver todos los problemas de cierto tipo, y se integra como tal con el conocimiento del sujeto. En una situación autónoma, el razonamiento se basa en la inducción, pero esta inducción se apoya en una cadena de inferencias que se pueden hacer explícitas.

La mayéutica socrática se suele describir como el arte de llevar a alguien a producir su propio conocimiento a través de preguntas, sin que Sócrates agregue nada a este conocimiento (Brousseau y Gibel, 2005). En este sentido, los autores afirman que las situaciones problema deben estimular el modelo de abordaje del docente al momento de proponerlas a

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

los estudiantes. Además, la identificación tanto de los modelos implícitos de razonamiento a diferentes niveles propuestos por Brousseau y Gibel (2005) como de las Categorías de Razonamiento Intuitivo de Fischbein (1987) requieren un análisis teórico a priori de los comportamientos, dificultades y procedimientos que pueden surgir en las diferentes fases de la clase y el desarrollo de una situación didáctica.

2. Metodología: Ingeniería Didáctica

Según Artigue (1988), la ID se caracteriza por un esquema experimental basado en los logros didácticos dentro del aula, es decir, en el diseño, realización, observación y análisis de las sesiones de enseñanza. Además, la ID también puede considerarse como una metodología de investigación experimental, por el registro en el que se ubica y el modo de validación asociado a ella: la comparación entre análisis a priori y a posteriori. La planificación y ejecución de una ID se puede estructurar en cuatro etapas, que son: i) Análisis preliminar, ii) Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, iii) Experimentación y iv) Análisis y validación a posteriori, descritas en el Tabla 1, conforme las ideas de Artigue (1988):

Etapa	Descripción
Análisis preliminares	Se realiza un levantamiento bibliográfico sobre el marco teórico didáctico, es decir, un análisis epistemológico de los contenidos y la enseñanza actual, un levantamiento de los conocimientos previos de los estudiantes, dificultades y obstáculos y un análisis del campo donde se ubicará la realización didáctica.
Concepción y análisis *a priori*	El investigador delimita las variables didácticas (globales y locales) sobre las que puede actuar la docencia, con el fin de orientar la investigación y proponer un plan de acción, así como la elaboración de la secuencia didáctica y la previsibilidad de los posibles comportamientos a partir de las variables didácticas determinadas.
Experimentación	En esta fase tiene lugar la aplicación de situaciones didácticas o secuencia didáctica elaborada a priori. También se firma el contrato didáctico con los sujetos involucrados en el proceso y se lleva a cabo la recolección de datos relacionados con la investigación.
Análisis *a posteriori* y validación	Esta última fase se basa en todos los datos recopilados durante la experimentación. A partir del análisis de los datos, es necesario compararlos con lo predicho previamente en el análisis a priori, con el fin de validar o no las hipótesis formuladas en la investigación.

Tabla 1. Etapas de la Ingeniería Didáctica.

La estructuración de un ED tiene dos niveles de organización en cuanto a las variables didácticas (la microingeniería y la macroingeniería) y dos tipos de validación (externa e interna). En cuanto a sus niveles de organización, Alves (2016) explica que la microingeniería se refiere a los fenómenos que ocurren en el contexto del aula, restringiendo el campo de investigación, y "en este nivel podemos estudiar un determinado tema dentro del ámbito de la complejidad de la clase" (p. 70), mientras que la macroingeniería consiste en una investigación más amplia, enfrentando obstáculos metodológicos y/o institucionales.

Con respecto a los tipos de validación de la ED, podemos entender que la validación externa tiene como objetivo evaluar el desempeño del estudiante durante la situación didác-

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

tica. Así, este proceso puede llevarse a cabo comparando las producciones iniciales y finales desarrolladas por el alumno, mediante la aplicación y análisis de cuestionarios y/o entrevistas, o incluso comparaciones con otros grupos (grupos experimentales o grupos de control). En la validación interna, se realiza una descripción global del alumnado, analizando su comportamiento y desarrollo cognitivo durante la ejecución de la situación didáctica, consistente en un seguimiento individualizado de cada uno de los sujetos implicados. (Almouloud, 2007; Laborde, 1997).

En este trabajo tenemos una microingeniería, pues buscamos observar y perfeccionar una ED dirigida a la enseñanza de las parábolas, dirigida al desarrollo de docentes en formación inicial, en el ámbito del aula. Además, el registro empírico de la investigación realizada a partir de este ED brinda datos para la validación interna, dado que se basa en la confrontación entre el análisis a priori, que trae el subsidio de un marco teórico, y el análisis a posteriori, a través de un sesgo que está anclado en la dimensión práctica.

2.1 Análisis preliminar

Las parábolas forman parte de la vida cotidiana del estudiante: la trayectoria de patear una pelota, lanzar un proyectil, antenas parabólicas y faros de automóviles, así como construcciones en el campo de la Arquitectura y la Ingeniería. Su definición analítica, según Lima (2014, p. 115) dice que "sea d una recta y F un punto fuera de la recta". En el plano determinado por d y F, llamase parábola de foco F y directriz d al conjunto de los puntos equidistantes de d y F". Tal definición puede ser representada por la Figura 3:

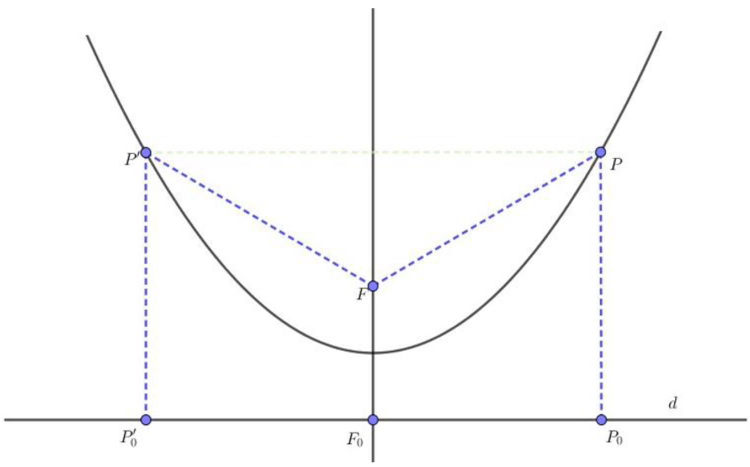

Figura 3. Definición analítica de la parábola segúndo Lima. Fuente: Elaboración propia.

Según Lima (2014), el punto P pertenece a la parábola de foco F y directriz d, porque la distancia del punto P al F es la misma distancia entre el punto P y Po. Es decir que $d(P,F)$ = $d(P,\ Po)$, con el segmento PPo perpendicular a la directriz d y la perpendicular FFo bajada del foco en la diretriz se configura en un eje de simetría.

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

Esta definición es común en los libros de Educación Básica; sin embargo, generalmente no explora el significado geométrico de estos elementos, posibilidades con el uso de la tecnología o aplicaciones reales (Bermúdez y Mesa, 2018; Cerqueira, 2015), lo que repercute en la dificultad del estudiante para abordar este tema a nivel superior en disciplinas como Geometría Analítica, Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial e Integral.

Esto muestra la importancia del desarrollo docente en el ámbito epistémico, reforzando la búsqueda de medios para una presentación clara de los contenidos, con posibilidades para las prácticas, reflexionando sobre el aprendizaje de los estudiantes. La Base Curricular Nacional Común (BNCC, acrónimo en portugués)[1] destaca la articulación entre geometría y álgebra, construyendo sentido para el estudiante, recomendando el no abordaje de ecuaciones disociadas de su interpretación geométrica y sugiriendo el uso de software para su enseñanza (Brasil, 2018). Además, vale la pena mencionar la relevancia de abordar este tema en la formación inicial, lo que rara vez ocurre en las carreras de Matemáticas en Brasil (Siqueira, 2016).

Cerqueira (2015) y Siqueira (2016) reflexionan sobre el abordaje de este tema y su exploración en forma abreviada, con didática que trae una mirada analítica/algebraica resumida y la no exploración de las características y posibilidades geométricas de la parábola, o incluso el uso de tecnología en el estudio de sus elementos. Partiendo de esta premisa, presentamos la parábola en este trabajo, buscando entenderla desde un punto de vista geométrico y la posibilidad de manipular sus parámetros con apoyo del software GeoGebra.

2.2 Concepción y análisis a priori

En este apartado se busca estructurar una situación didáctica que aborde la parábola más allá del prisma algebraico/analítico, explorándola desde una perspectiva geométrica, a partir de una construcción en entornos de lápiz y papel y su transposición a GeoGebra. El software, al permitir la manipulación de sus elementos por parte del alumno, proporciona un entorno en el que puede demostrar su razonamiento matemático para la solución.

A partir de la situación desarrollada, delimitamos las posibles variables didácticas (locales), como hipótesis más específicas enfocadas al ámbito del aula. Tales hipótesis se refieren a la predicción actitudinal del estudiante, sobre su comportamiento frente a la situación propuesta que, al final de todo el curso, fueron fundamentales para la validación de la Ingeniería y el progreso de las demás situaciones desarrolladas en la disertación. En este caso, como variables locales, consideramos:

(i) Posibles dificultades en el desarrollo de situaciones didácticas en GeoGebra (traducción del papel al software);

(ii) Los conocimientos previos del alumno sobre la materia no son suficientes para comprender y resolver la situación didáctica;

(iii) El estudiante no presenta claramente una manifestación de las Categorías de Razonamiento Intuitivo.

[1] Documento guía para el currículo de la Educación Básica en Brasil.

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

En esta etapa, elaboramos una situación didáctica con el objetivo de que el estudiantado (profesorado en formación) reconozca la curva de la parábola a partir de los pliegues del papel y sus elementos principales –foco, vértice y directriz–, y así utilice técnicas de diseño geométrico y materiales como el papel, regla y lápiz. A continuación, nuestro objetivo es construir y discutir la actividad propuesta en el software. Creemos que su ingenio depende directamente de su trayectoria académica, si el estudiante ha estudiado o no este tema, así como de cómo fue abordado. Véase la situación didáctica propuesta en la Tabla 2:

Con la ayuda de una regla, traza una línea recta r y fuera de ella marca un punto F. Elige entre los puntos r equidistantes A1, A2, A3, A4, ... y dobla el papel de manera que A1 coincida con F. Para facilitar visualización de la curva, dibuja la línea que coincide con el pliegue. Repite esta operación para todos los demás puntos marcados en r. Ve que los pliegues obtenidos son tangenciales a una curva. Trázalo y responde: a) ¿Qué tipo de curva se describió? b) ¿Qué papel juegan la línea r y el punto F en la curva descrita? Dibuja esta situación en GeoGebra y presenta su solución.

Tabla 2. Situación didáctica propuesta.

Su descripción se basa en las teorías presentadas en el marco teórico explicado y discutido en la sección anterior.

En la *situación de acción*, esperamos que el estudiante, después de leer atentamente la pregunta y, en caso de conocimiento previo de la definición de parábola, manifieste una intuición afirmativa, identificando los elementos "recta r" y "punto F" como directriz y foco de la parábola, respectivamente. Ya en la *situación de formulación*, esperamos que el estudiante realice los procedimientos descritos en la pregunta y llegue, a partir de intuiciones conjeturales, a la construcción de la parábola con pliegues en el papel, como en la Figura 4:

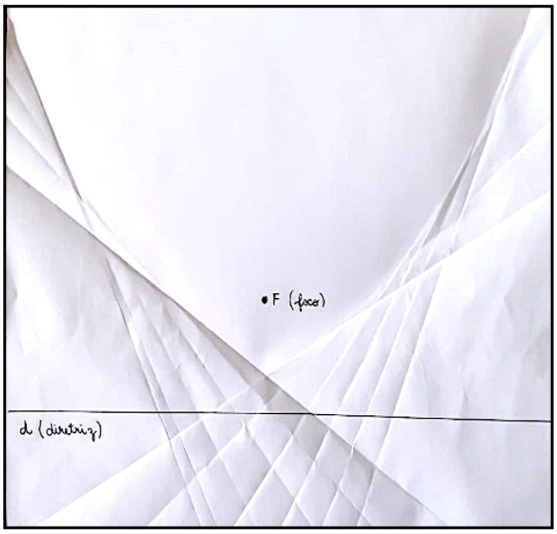

Figura 4. Parábola con técnicas de plegado de papel

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

En la *situación de validación*, con el aporte de GeoGebra, se busca que el estudiante exprese formalmente el concepto de parábola y una vista previa de su solución en el software, expresando intuiciones conjeturales y anticipatorias.

La construcción con lápiz y papel, a nuestro juicio, puede brindar subsidios para que el estudiante visualice los elementos de la parábola y busque diferentes formas de construirla en GeoGebra, tal como se solicita en la pregunta. Según Fischbein (1999, p. 16), "las intuiciones no son absolutas. Dependen del contexto, en el presente caso, del contexto perceptivo". Así, en el entorno de GeoGebra, a partir de una percepción visual, el estudiante podría llegar a la construcción que se muestra en la Figura 5 (o una construcción similar):

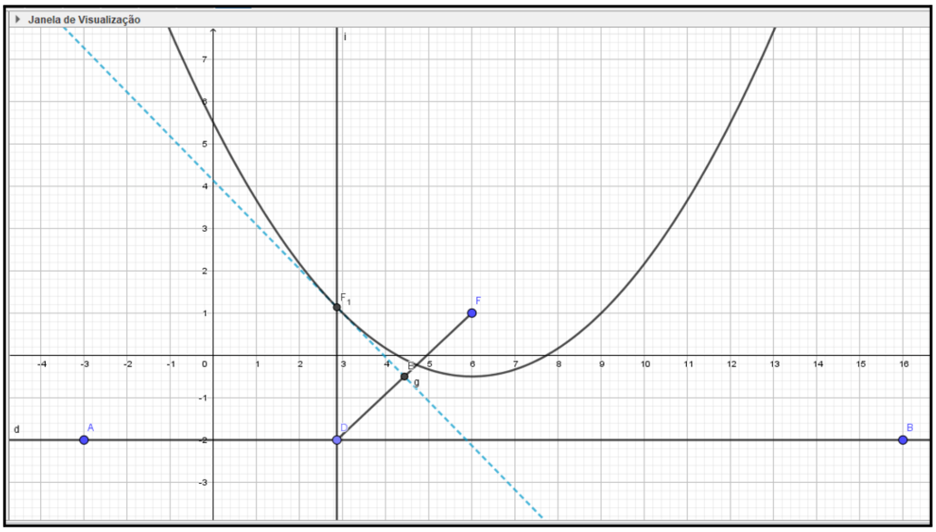

Figura 5. Parábola con pliegues en el ambiente GeoGebra.

Finalmente, para la *situación de institucionalización*, apuntamos a la reanudación de la situación didáctica por parte del docente, así como la discusión de la definición de parábola y demostraciones de la solución en papel y en software, considerando el trabajo de Lima (2014), mencionado en nuestro análisis preliminar.

3. Resultados y discusión

En los siguientes subapartados presentamos las dos fases finales de la Ingeniería Didáctica, las cuales nos brindan los resultados de la implementación de la situación didáctica, a partir de la recolección y análisis de datos estructurados en las teorías esbozadas, y su discusión.

3.1 Experimentación

La situación didáctica propuesta se desarrolló con un solo sujeto, un profesor en formación inicial, estudiante del 6º semestre de la carrera de Matemáticas en una institución pública

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

brasileña y no participante del experimento de investigación oficial. Este estudiante colaboró voluntariamente para que pudiéramos recolectar datos y evaluar las variables didácticas pre-establecidas en el análisis a priori y, de ser necesario, realizar los ajustes necesarios para que pudiéramos pasar a la etapa de experimentación y recolección de datos de la investigación.

Durante la interacción entre el estudiante y la situación didáctica, observamos aspectos como la claridad del problema, el tiempo propuesto para su solución, el nivel de dificultad de la pregunta asociada al camino de la dialéctica TSD y las manifestaciones intuitivas que presenta este alumno, tanto en el uso del entorno lápiz y papel como en el entorno computacional, así como la relevancia de los datos recogidos.

En un primer momento, se estableció el contrato didáctico, en el que el investigador pedía al estudiante que leyera la situación propuesta, dibujara su solución con lápiz y papel y la trasladara a GeoGebra, señalando sus conjeturas y observaciones. Se especificó que todo el material (notas, grabaciones de video, audio y fotografías) sería recolectado para su análisis. El estudiante declaró que estaba al tanto de su colaboración en el experimento, aceptando que se llevara a cabo, mediante la firma de un formulario de consentimiento. El experimento de situación didáctica se llevó a cabo de la siguiente manera:

En la *situación de acción*, el alumno leyó el problema y se tomó un tiempo para pensar cómo proceder. Inicialmente, había dificultad para entender cómo se debían hacer los pliegues en el papel. Al principio, el estudiante dibujó un rayo corto, con varios puntos separados, como se muestra en la Figura 6:

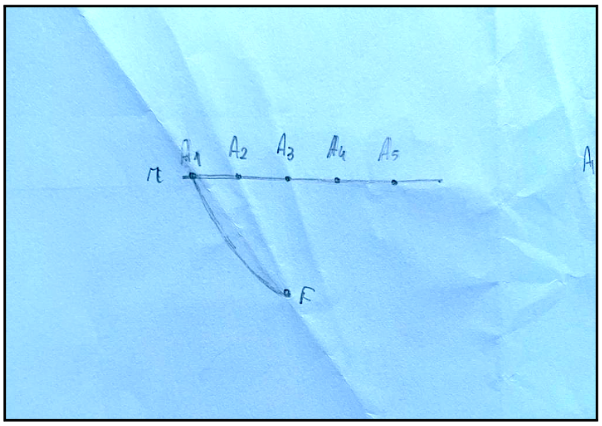

Figura 6. Croquis inicial del participante en la situación de acción.

Nótese que, el estudiante hizo un dibujo que no tenía el tamaño adecuado para los pliegues, demostrando una intuición afirmativa, aunque parcialmente inadecuada. Y vea que, según la Figura 6, hubo un intento de dibujar los pliegues que no tuvo éxito. Cuando la situación didáctica propone que "*Con la ayuda de una regla, traza una línea recta r y fuera de ella marca un punto F. Elige entre los puntos r equidistantes A1, A2, A3, A4, ... y dobla el papel de manera que A1 coincide con F*" no se menciona la longitud de esta línea.

Durante la *situación de acción*, "el alumno puede mejorar o abandonar su modelo para crear otro: la situación provoca así un aprendizaje por adaptación" (Almouloud, 2007, p. 37). Así, cuando el alumno entendió que no podría hacer los pliegues de esa manera, reelaboró su razonamiento inicial y rehizo su boceto, en un tamaño mayor (Figura 7):

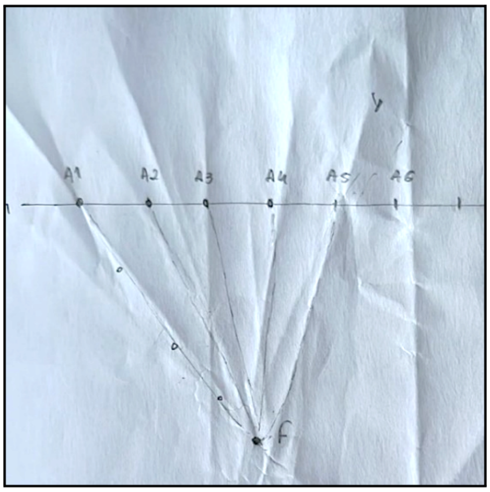

Figura 7. Segundo boceto del participante en situación de formulación. Fuente: Registro de los autores.

En la *situación de formulación*, al realizar los pliegues, el estudiante trazó con un lápiz una conexión entre los puntos trazados sobre la recta y el punto F fuera de ella, lo que para el investigador, como observador, era algo incomprensible. Sin embargo, al leer nuevamente el enunciado y observar su contorno, a través de una intuición conjetural y aún con restos de dudas, el estudiante afirmó que la curva "parecía una parábola", si considerábamos los puntos más "abiertos" (refiriéndose a los puntos más distantes entre sí).

En la segunda parte de la solución, el estudiante procedió a delinear su estrategia en GeoGebra. Sin embargo, observamos que en su construcción él no recurrió de inmediato a los recursos que podían brindar una parábola, como el uso de la herramienta parábola, en la guía cónicas. Intuitivamente, trató de esbozar su propio dibujo, tal como se estaba visualizando en papel, transponiéndolo al software, como se muestra en la Figura 8:

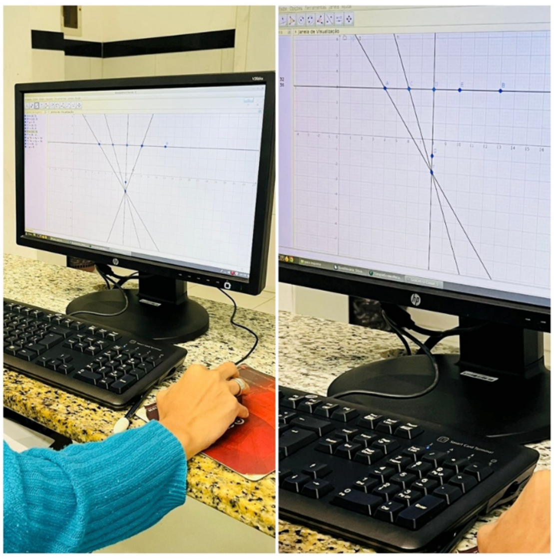

Figura 8. Transposición de papel al software. Fuente: Registro de los autores.

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

En la Figura 8, la construcción parcial del sujeto muestra que sus intuiciones conjeturales todavía no apuntan caminos para intuiciones anticipatorias, porque por la forma en que se llevó a cabo la construcción, no fue posible visualizar realmente la curva de la parábola. Las líneas que conectan el punto F fuera de la línea y los demás puntos aparentemente fueron creadas para representar lo que serían los pliegues en el papel. Así, el estudiante volvió a afirmar que sería una parábola, pero que tenía dificultades para reproducirla en el entorno de GeoGebra, ya que "no recordaba bien el tema".

La identificación de las dificultades inherentes a la comprensión de un objeto matemático es de gran influencia para orientar el trabajo del docente, en lo que se refiere a la estructuración de un medio que proporcione las condiciones mínimas para que ocurra la aprehensión y construcción de nuevos conocimientos. En este sentido, Brousseau (1976) explica la importancia de comprender la noción de obstáculo en la enseñanza de las matemáticas para la construcción de sentido por parte del estudiante, afirmando que "el objetivo principal de la didáctica es estudiar las condiciones en que deben estructurarse las situaciones o problemas que se le presentan al alumno para favorecer la aparición, funcionamiento y rechazo de estas concepciones" (p. 104, nuestra traducción).

En la situación de validación, al tratar de responder a la pregunta del ítem b: "¿Qué roles juegan la línea r y la curva del punto F descritas?", el estudiante dijo, según consta en el registro de transcripción de audio de la reunión:

> *Es como si la recta r fuera el eje x y el punto F cualquier punto, pero cuando dibujo las rectas, parece que la F es el vértice de una parábola, en este caso el punto mínimo. Y la recta r puede ser el eje x o una recta paralela al eje x. Sé que se supone que es una parábola, que la parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo dependiendo de a, b y c, y en este caso, en este dibujo aquí en GeoGebra, se suponía que era hacia arriba, pero no puedo dibujar bien la curva.*

Tenga en cuenta que el alumno se da cuenta de que la curva es una parábola, pero no puede describirla con mayor precisión en el papel ni reproducir su contorno en el software. Cuando el investigador le preguntó sobre su conocimiento de las parábolas, el participante afirmó haberlas estudiado solo en la escuela secundaria, en la escuela secundaria, pero que nunca llegó a verlas durante la graduación. Luego, cuando se le preguntó sobre su conocimiento de las cónicas, dijo que sabía de qué se trataba, pero que nunca las había estudiado.

Notamos en su discurso que no utiliza términos como foco o directriz, que son elementos básicos en la construcción geométrica de una parábola. Sin embargo, a partir de sus estrategias afirmativas y conjeturales y manifestaciones intuitivas, el alumno pudo percibir la existencia de la curva a través de sus croquis.

Luego de esta discusión, la investigadora presentó la institucionalización desde Lima (2014, p. 115), ya presentada en el análisis a priori de este trabajo, aclarando el concepto de parábola como lugar geométrico y demostrando la técnica para su construcción con pliegues. Además, presentó su construcción en GeoGebra (Figura 5).

3.2 Análisis a posteriori y validación

Después de dialogar con el docente investigador y comprender el concepto de parábola presentado en la institucionalización, el estudiante volvió a la construcción en GeoGebra y afirmó que la recta r sería la directriz y el punto F, fuera de la recta, sería el foco. Al explorar las guías y buscar una herramienta que le ayudara a dibujar la parábola, el estudiante encontró la herramienta parábola y, observando la orientación proporcionada por GeoGebra (Figura 9), hizo clic en el punto C y la recta f, encontrando:

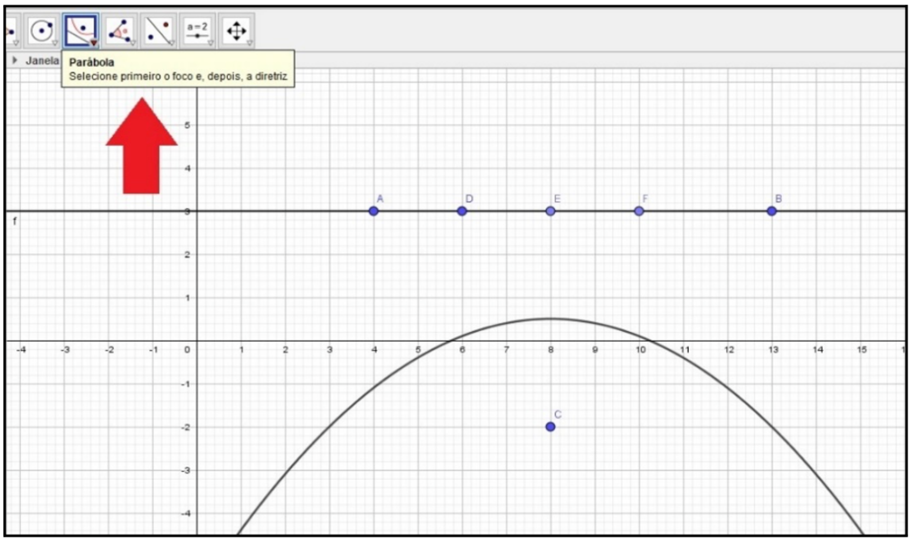

Figura 9. Parábola construida en el experimento piloto. Fuente: Registro de video de investigación.

Tenga en cuenta que las líneas dibujadas anteriormente fueron luego ocultadas por el estudiante, para una mejor visualización de la parábola. Posteriormente, tal como se indica en el contrato didáctico, el estudiante guardó el archivo .ggb de su construcción y la pantalla de la computadora grabando en video y entregó todos los registros escritos, consciente de que estos materiales serían la base para el análisis de este experimento piloto, asintiendo además una vez su uso.

Dicho esto, analizamos cada uno de los puntos enumerados anteriormente para la continuidad de la investigación y desarrollo de las demás situaciones didácticas de la disertación en las formas preestablecidas. Verificamos que la situación didáctica era clara para el participante, a pesar del malentendido inicial de interpretación, en cuanto al tamaño de la línea a trazar. También consideramos que su nivel de dificultad fue aceptable, dado que el participante no tenía un conocimiento profundo sobre el tema, lo que permitió desarrollar el TSD de forma bien estructurada.

El conocimiento del participante en GeoGebra, aunque básico, fue suficiente para percibir sus manifestaciones intuitivas. Si bien el participante no llegó a la solución final (solo después de la institucionalización), lo que dificultó su proceso de resolución fue la falta de conocimiento previo sobre el tema y no sus habilidades con el software. Además, el tiempo para el desarrollo de la situación didáctica y los recursos proporcionados fueron suficientes, y

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

la grabación de la pantalla de la computadora y el archivo .ggb, Los materiales escritos y las grabaciones de audio y fotografías también nos proporcionaron datos importantes sobre la factibilidad de la investigación, ya que pudimos percibir manifestaciones intuitivas durante el proceso de construcción de la solución.

Entre los obstáculos didácticos que se pueden identificar, se percibe la limitación en el conocimiento previo sobre la parábola restringida únicamente al tema de las funciones cuadráticas, en las que el sujeto asocia la parábola de forma natural/intuitiva a la gráfica de una función $f(x)=ax^2+bx+c, \forall\ a\neq 0$. Brousseau (1989) explica que los errores observados en los estudiantes pueden agruparse en torno a concepciones muy específicas o, por el contrario, muy generales. Además, el autor también señala que los obstáculos de aprendizaje deben ser considerados en conjunto, articulándolos y analizando la relación entre ellos. Sobre tales obstáculos, "varios pueden coexistir, contradecirse y suplantarse sucesivamente" (Brousseau, 1989, p. 49).

Recomendamos una reflexión y observación al respecto en el experimento oficial de la disertación, pues de perdurar este escenario, entendemos que esto puede limitar el trabajo del profesor de matemáticas en la enseñanza del tema de las parábolas a través del prisma geométrico y analítico, que en consecuencia repercute en el aprendizaje de los estudiantes. Luego de la experiencia piloto realizada, se siguió el camino de la investigación y construcción de la disertación con otras situaciones didácticas estructuradas, continuando esta Ingeniería.

Conclusiones y consideraciones

Este trabajo partió de una problematización que observó, en un levantamiento bibliográfico, algunos vacíos que permean la formación inicial del profesor de Matemática, en lo que se refiere a la enseñanza de las parábolas. El modelo recurrente de enfoque tradicional y la fragmentación del tema, desconectado de la realidad y temas afines, como las funciones cuadráticas, son un ejemplo de estos vacíos preexistentes encontrados en esta investigación.

De esta forma, desarrollamos una Ingeniería Didáctica para verificar los posibles obstáculos didácticos que dificultan la forma en que el docente en formación inicial comprende y, en una visión futura, abordaría la parábola en su locus de trabajo. Para comprender mejor este escenario, nos apoyamos en la Teoría de las Situaciones Didácticas y las Categorías del Razonamiento Intuitivo, que estructuraron la sesión didáctica de esta experiencia piloto, soporte de la investigación de maestría.

En el análisis preliminar esbozamos algunos aspectos epistemológicos y didácticos en la enseñanza de las parábolas. En el análisis a priori, estructuramos una situación didáctica para su enseñanza y la desarrollamos en un experimento. La observación y recolección de datos se dio a través de la participación voluntaria de un estudiante en formación inicial, quien nos brindó elementos para la corrección de las rutas de situaciones didácticas, análisis y validación a posteriori, así como conjeturas para una futura validación del experimento oficial en el máster.

La desconexión del tema de las parábolas con la realidad y el obstáculo para establecer conjeturas e interpretar problemas sigue siendo un obstáculo presente en el razonamiento

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

demostrado del sujeto. Encontramos, por ahora, la necesidad de discutir la parábola en el aula, articulando los puntos de vista geométrico, algebraico y analítico, estableciendo una relación entre la parábola como sección cónica, gráfica de una función cuadrática y lugar geométrico y lo proponemos con el aporte de la tecnologia.

Referencias

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. UFPR.

Alves, F. R. V. (2016). Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o seu ensino. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia, 9*(3), 1-21. https://doi.org/mmk2

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): Teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia, 12*(2), 97-116. https://doi.org/mmk3

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308. https://bit.ly/49Vpzdj

Bermúdez, E. A. y Mesa, J. H. L. (2018). Estudio histórico, epistemológico y didáctico de la parábola. *Práxis & Saber, 9*(19), 63-88.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. https://bit.ly/3TAY5UK

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme y J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, Louvain-la-Neuve* (pp. 101-117). https://bit.ly/3TjyPkn

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d´enseignement de mathématiques*. [Thèse d'État et Sciences]. Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in mathematics: Didactique des mathématiques,* 1970-1990. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Ática.

Brousseau, G. y Gibel, P. (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. En C. Laborde, M. J. Perrín-Glorian y A. Sierpinska. *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 13-58). Springer.

Cerqueira, A. A. (2015). *Parábola e suas aplicações*. [Tesis de Máster]. Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Mathematics Educational Library.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*(11), 11-50. https://doi.org/cv4t5t

Grande, A. L., e Silva, B. A. (2013). Resolução de questões relacionadas ao cálculo e o uso da intuição e do rigor. *Educação Matemática Pesquisa, 2*(1), 27-38. https://bit.ly/4cfetBz

Kidron, I. (2011). Tacit models, treasured intuitions and the discrete - continuous interplay. *Educational Studies in Mathematics, 78*(1), 109-126. https://bit.ly/43j8vLO

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767

DIDACTICAE | ISSN 2462-2737 | DOI: 10.1344/did.41767

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia, 10*(1), 97-112. https://doi.org/c28hs3

Lima, E. L. (2014). *Geometria analítica e àlgebra linear*. Coleção Matemática Universitária. IMPA.

Maioli, M., Seifert, L. C. E., Brandt, S. J. y Rodrigues, S. V. O. (2012). Outra parábola na igreja? *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 1*(1), 336-346. https://bit.ly/4aov8aE

Margolinas, C. (2015). Situations, savoirs et connaissances…comme lieux de rencontre? *Formation et Pratiques d'Enseignement en Questions, 2*(19), 31-39. https://hal.science/hal-01165559

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Revista Zetetiké, 4*(2), 65-74. https://bit.ly/3wWBI35

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). *A psicologia da criança*. 5.ª ed. Difel Editorial.

Siqueira, C. A. F. (2016). *Um estudo didático das cônicas: quadros, registros e pontos de vista*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Vargas, A. F. y Leivas, J. C. P. (2019). Superfícies quádricas e o Ensino de Geometria Analítica: intersecções na pesquisa. *Revista REAMEC, 7*(3), 37-55. https://doi.org/mmk4

Sousa, R.T. y Alves, F. R. V. (2024). Parábolas y razonamiento intuitivo: una experiencia piloto apoyada en la Didáctica de las Matemáticas. *Didacticae*, (15), 1-22. https://doi.org/10.1344/did.41767